ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 16 FÉVRIER 1948.

PRÉSIDENCE DE M. CHARLES JACOB.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS
DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

ÉCONOMÉTRIE. — *Amélioration du niveau de vie par modification du régime économique.* Note de M. **Albert Caquot**.

Notre étude précédente a montré que *le prix de revient* d'une production, jusqu'au *point de consommation*, peut se mettre sous la forme

$$p=\sum_0^n s_i m_i+\sum_0^{n'} s'_i\, m'_i+\sum_0^{n_{\text{IV}}} r_i m'''_i+\sum_0^{n'''} l'_i\, p'_i\, \varepsilon'_i.$$

La première somme correspond à tous les éléments de la production. Le salaire nominal s_i est formé de toutes les sommes nettes dont dispose le travailleur utilisé, à un instant donné, quel que soit son rôle social, travailleur indépendant, artisan, artiste, chef d'entreprise ou travailleur recevant un salaire direct, complété par des allocations diverses et diminué de tous les prélèvements, impôts compris. Le temps (m_i) en années correspond à l'opération faite par ce même travailleur.

La décomposition en termes de la forme $s_i m_i$ s'étend à chaque opération dans tous les ateliers de production, de matières, d'outils, de transformations, y compris ce qui est nécessaire pour compenser dans chaque opération l'usure de l'équipement et ce qui correspond à la mise en magasin et aux transports jusqu'au point de consommation.

La deuxième somme correspond aux organismes latéraux non directement nécessaires mis à la charge de la production, commerce, contrôles, fonctionnaires, etc.

La troisième somme est formée des prélèvements (retraites ou indemnités) nécessaires pour assurer la vie des personnes non actives (retraités, malades, etc).

La quatrième correspond à l'intérêt payé aux épargnants. Elle est positive en période normale, négative en période de forte dévaluation.

L'amélioration du revenu national réel, et par lui, du salaire vrai ne peut résulter que de l'amélioration des m, m' et m'' temps (en années) à fixer pour chaque opération.

Constitution des facteurs m. — m_i, pour l'opération d'indice i, est la consommation de temps affectée du salaire s_i. Ce facteur m_i dépend :

a. du temps f_i normalement nécessaire, en heures, sur l'équipement existant;

b. de la productivité a_i personnelle du travailleur;

c. du nombre n_i d'heures de travail effectif dans l'année de ce même travailleur.

d. de l'amélioration μ_i de l'équipement que détermine l'équation d'optimum du prix, en fonction de la grandeur de la production.

Bref nous écrirons $m_i = f_i / a_i n_i \mu_i$.

Constitution des facteurs m'. — f'_i étant le temps en heures utilisé par le contrôleur, le fonctionnaire, le commerçant, dans une opération latérale quelconque intervenant dans le prix de l'objet, jusqu'à la livraison au consommateur.

a', η', μ' ayant la même définition que a, n, μ, mais applicables aux organismes latéraux.

Nous écrirons

$$m' = \frac{f'_i}{a'_i\, n'_i\, \mu'_i}.$$

Constitution des facteurs m''. — m'' représente le temps en années, à prévoir dans tout prix p, relatif à chaque pension ou indemnité annuelle pour retraités ou malades.

Pour une augmentation instantanée de production, le total des prélèvements ci-dessus est sans changement, et par opération diminue proportionnellement à leur nombre, et par conséquent à la valeur totale P de la production.

Nous écrirons $m''_i = g_i / \mathrm{P}$, expression qui définit le coefficient g_i constant ou très lentement variable.

Ainsi sont séparés les paramètres essentiels intervenant dans les variations du revenu national et du pouvoir d'achat, ce qui permet d'étudier les progrès à réaliser dans le fonctionnement complexe mais précis de l'économie d'un pays.

Bref le prix de revient d'un élément de la production apparaît sous la *formule détaillée*

$$p = \sum_0^{n} \frac{s_i f_i}{a_i n_i \mu_i} + \sum_0^{n'} \frac{s'_i f'_i}{a'_i\, n'_i\, \mu'_i} + \sum_0^{n^{\text{IV}}} \frac{r_i g_i}{\mathrm{P}} + \sum_0^{n''} l'_i\, p'_i\, \varepsilon'_i.$$

L'amélioration du prix de revient p au point de consommation, en fonction des divers paramètres, détermine l'amélioration du pouvoir d'achat.

Cette étude conduit aux analyses suivantes :

Variations de f. — Quantité d'heures de travail consacrées à une opération de production donnée. Ses variations résultent directement :

1° De l'utilisation de matières améliorées; 2° du progrès dans l'équipement;

3° du coefficient d'utilisation de l'équipement; 4° de la politique de l'énergie; 5° de la modification dans l'élément à réaliser; 6° de la qualité des outils; 7° de l'efficacité de la méthode de travail.

Variations des a et des n. — L'activité horaire de la main-d'œuvre, et le nombre des heures de travail effectif sont des variables indépendantes fixées par des données propres.

Variations des f', des a' et des n'. — Ces paramètres peuvent être analysés et déterminés comme les coefficients qui précèdent, mais en tenant compte de leur propre définition.

Variations de g et de P. — Les deux variables correspondantes sont pour la première proportionnelle au nombre des personnes non actives, et pour la seconde égale à la grandeur totale de la production.

Variations de l', p' et ε'. — Le paramètre l' est la part de l'épargne utilisée en prenant comme base p' fraction du prix p qui est atteinte à la fin de l'opération envisagée. ε' est le taux d'intérêt normal de l'épargne fixé à un instant donné. De ces définitions découlent les variations.

Variations de μ et de μ'. — Comme nous l'indiquons plus haut dans la définition de ces coefficients, l'équation d'optimum du prix introduit dans chaque cas un facteur dépendant de la production.

Les deux facteurs μ et μ' sont des fonctions croissantes de la production.

La croissance est lente pour μ. Dans l'ensemble de la large économie d'une nation μ varie sensiblement comme $P^{0,2}$.

La croissance est beaucoup plus rapide pour μ'.

Nous avons pu déduire de là les améliorations possibles de la production et du pouvoir d'achat en France, dans un court délai, d'une part, et au bout de cinq ans, après les progrès normaux de l'équipement, d'autre part.

Le tableau ci-dessous les résume d'après l'analyse précédente en partant de données pessimistes.

Variations de $1/f$.

	Dans un court délai.	Dans cinq ans.
1. Matières....................	1,030	1,050
2. Équipement.................	1,020	1,100
3. Utilisation de l'équipement...	1,035	1,050
4. Énergie.....................	1,005	1,110
5. Modification de l'élément.....	1,030	1,050
6. Amélioration des outils.......	1,015	1,020
7. Méthode de travail...........	1,020	1,030
Facteur correctif $a \times n$.........	1,040	1,100
Facteur μ.....................	1,000	1,128
Amélioration relative (produit de ces valeurs).................	1,210	1,84

Variations des f', a' et η'. — Elles sont plus fortes, surtout en raison de l'amé-

lioration de μ'. Mais le fait essentiel est la possibilité d'augmenter de 17 % le personnel de la production par prélèvement sur les secteurs latéraux. Il serait ainsi possible d'augmenter la production par un nouveau facteur égal à $1,17^{1,25}$ conformément à la loi du facteur μ, soit 1,22. Au total le pouvoir d'achat, proportionnel à la production pour une même population, atteindrait progressivement en cinq ans plus du double du pouvoir d'achat actuel, d'après le facteur $1,84 \times 1,22 = 2,24$.

ÉLECTRONIQUE. — *Impact d'un faisceau d'analyse sur une cible mince à deux faces.* Note [1] de M. **René Barthélemy.**

On pourrait déduire de la précédente Note [2] qu'il suffit de choisir un corps de résistivité beaucoup plus élevée que celle du verre pour améliorer la qualité des images. On est très limité dans cette voie.

Considérons, en effet, le faisceau au i_f, à électrons lents, qui balaie la cible et frappe l'élément CD.

On admet préalablement que le potentiel du cylindre A, B, C, D est uniforme et amené à la valeur u_0 (positif) par rapport à la masse, l'image électronique primaire provoquant une émission secondaire supérieure à l'impact primaire.

Cette émission est recueillie par la grille G, légèrement positive (*fig.* 1).

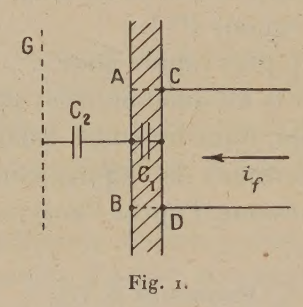


Fig. 1.

La durée de l'impact (2.10^{-7} seconde) est très courte par rapport à la constante du milieu (2.10^{-2}), et l'on peut admettre que, pendant ce temps, la distribution est donnée par le réseau capacitif seul. La dérivation par le reste de la cible équivaut à doubler sensiblement la capacité C_2, qui existe entre la face AB et la masse.

En appelant i l'intensité incidente, R la résistance dynamique de la tétrode que forme le système d'émission à électrons lents, on a la relation

$$\frac{q_1}{c_1} + \frac{q_2}{2C_2} = Ri.$$

---

[1] Séance du 2 février 1948.

[2] *Comptes rendus*, **226**, 1948, p. 292.

On retrouve le même résultat qu'avec l'isoscope dont j'ai donné la description en 1945 (*fig.* 2) ([3]).

L'intensité a pour expression

$$i = \frac{u_0}{R} e^{-\frac{t}{CR}}$$

en posant

$$C = \frac{2 C_1 C_2}{C_1 + 2 C_2}.$$

La résistance ρ_1 qui existe entre les deux faces AB et CD n'intervient pratiquement pas pendant l'impact, pour la raison citée plus haut ($C_1 \rho_1 \gg 2.10^{-7}$).

Dans les tubes couramment utilisés, R est de l'ordre de 3 à 5 Ωg et C de 2.10^{-15} farad; le produit CR est donc très petit à côté de la durée de passage du faisceau sur la surface considérée. Il s'ensuit que le courant de faisceau est pratiquement annulé et que la tension entre les points P et Q (*fig.* 2) est nulle après ce passage.

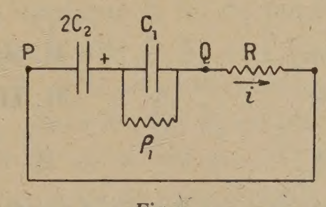


Fig. 2.

Cela ne signifie pas que les condensateurs C_2 et C_1 soient déchargés, car C_1 a pris la charge

$$q_1 = \int_0^{2.10^{-7}} i \, dt.$$

La tension résiduelle sur C_1, soit $u_1 = q_1/C_1$ est de l'ordre du cinquième de u_0, et de sens inverse.

L'égalité de potentiel entre les deux faces AB et CD est rétablie ensuite grâce à la résistance de fuite ρ_1, en 2 ou 3/100e de seconde.

Cette résistance ne peut donc pas être augmentée, sinon une charge résiduelle subsisterait, susceptible de provoquer un effet de traînage dans les analyses successives d'images mobiles.

M. **Joseph Magrou** fait hommage à l'Académie de son Ouvrage *Les maladies des végétaux*.

M. **Henri Perrier de La Bathie** fait hommage à l'Académie de quatre fascicules de la *Flore de Madagascar*, publiée sous la direction de M. Henri Humbert,

---

([3]) *Onde électrique*, décembre 1945; *Comptes rendus*, **219**, 1944, p. 57. (Conférence, Sorbonne, janvier 1945).

et contenant des Mémoires dont il est l'auteur : 1° 37ᵉ famille, *Commélinacées;* 2° 40ᵉ famille, *Liliacées;* 3° 49ᵉ famille, *Orchidées* (tome II); 4° 143ᵉ famille, *Passifloracées;* et d'un cinquième fascicule intitulé 30ᵉ famille, *Palmiers,* par Henri Jumelle.

PRÉSENTATIONS.

Dans la formation d'une liste de candidats au poste de Directeur de l'Observatoire du Pic du Midi, pour la première ligne, M. *Jean Rösch* obtient 29 suffrages contre 10 à M. *Alexandre Dauvillier* et 1 à M. *Henri Dessens;* il y a 4 bulletins blancs.

Pour la seconde ligne, M. *Henri Dessens* obtient 37 suffrages contre 3 à M. *Alexandre Dauvillier;* il y a 3 bulletins blancs et 1 bulletin nul.

En conséquence, la liste présentée à M. le Ministre de l'Éducation Nationale comprendra :

En première ligne............. M. **Jean Rösch.**
En seconde ligne............. M. **Henri Dessens.**

CORRESPONDANCE.

Le Secrétaire général du **Seventh Pacific Science Congress** invite l'Académie à se faire représenter à ce Congrès, qui aura lieu en Nouvelle-Zélande, au mois de février 1949.

M. **Theodor Mortensen**, élu Correspondant pour la Section d'Anatomie et Zoologie, adresse ses remercîments à l'Académie.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° *Annuaire général de l'Université Laval pour l'année académique* 1947-1948.

2° *Colloquium mathematicum.* Komitet redakcyjny : Bronislaw Knaster, Edward Marczewski, Hugo Steinhaus, Wladyslaw Slebodzinski. Volume I, fascicule 1.

3° *Bulletin of the astronomical Institutes of Czechoslovakia.* Volume I, n° 1.

4° *La Recherche aéronautique.* Bulletin bimestriel de l'Office national d'études et de recherches aéronautiques, n° 1.

ALGÈBRE. — *Théorie non abélienne des corps de classes pour les extensions galoisiennes des corps de nombres algébriques : conséquences de la loi de monodromie; résumé de la théorie locale.* Note de M. **Marc Krasner**, présentée par M. Élie Cartan.

Je conserve les notations de mes Notes précédentes ([1]). De la loi de monodromie que j'y ai démontrée (avec des hypothèses, par mégarde, trop restrictives sur les facteurs premiers $\mathfrak{P}'$ de D_K dans K' : le théorème reste valable si l'on ne suppose, pour ces $\mathfrak{P}'$, que la non-ramification du corps composé de $K'_{\mathfrak{p}'}$ et de $(K/k)_{\mathfrak{p}}$ par rapport à $K'_{\mathfrak{p}'}$, et, alors, le théorème réciproque est aussi vrai [et banal]) résultent les conséquences suivantes : 1° *Si* K/k et K'/k *satisfont aux conditions de la loi de monodromie, et si* $(K' : k) \leqq (K : k)$, *on a* $K' = K$; 2° *Si, pour tout facteur premier* $\mathfrak{P}'$ *de* $D_{K'/k}$ *dans* K', *le corps composé de* $K'_{\mathfrak{p}'}$ *et de* $(K/k)_{\mathfrak{p}}$ *est non ramifié par rapport à* $(K/k)_{\mathfrak{p}}$ *et si, pour tout idéal premier* $\mathfrak{P}'$ *de* K' *tel que* $N(\mathfrak{P}') \leqq |D_K|^{(n')!:2}$ [où $n' = (K' : k)$], $K'_{\mathfrak{p}'}/k_{\mathfrak{p}}$ *est* $\subseteq (K/k)_{\mathfrak{p}}$, K'/k *est une sous-extension de* K/k (on applique la loi de monodromie au corps de Galois de K'/k, auquel on fait jouer le rôle de K, et à K, auquel on fait jouer le rôle de K'), *et réciproquement;* 3° K'/k *est galoisienne si et seulement si, pour tous les facteurs premiers* $\mathfrak{P}'$ *de* $D_{K'/k}$ *dans* K', $K'_{\mathfrak{p}'}/k_{\mathfrak{p}}$ *est galoisienne et ne dépend que de* $\mathfrak{p}$ *et, pour tout idéal premier* $\mathfrak{P}'$ *de* K' *tel que* $N(\mathfrak{P}') \leqq |D_{K'}|^{(n')!:2}$, $(K'_{\mathfrak{p}'} : k_{\mathfrak{p}})$ *ne dépend que de* $\mathfrak{p}$ (on applique la loi de monodromie au corps de Galois de K'/k, qui joue le rôle de K, et à K'); 4° $G_{K/k}$ *est engendré par les groupes d'inertie dans* K/k *des facteurs premiers* $\mathfrak{P}$ *de* $D_{K/k}$ *dans* K *et par les groupes de décomposition dans* K/k *des idéaux premiers* $\mathfrak{P}$ *de* K *tels que* $N(\mathfrak{P}) \leqq \sqrt{|D_K|}$ (on applique la loi de monodromie à la sous-extension $\bar{K}/k$ de K/k appartenant au sous-groupe $\bar{g}$ de $G_{K/k}$ engendré par les groupes indiqués et à k/k, jouant le rôle de K'/k); 5° soient K'/k et K''/k deux sous-extensions de K/k, $\mathfrak{P}$ un idéal premier de K, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$ les idéaux premiers des K', K'' qu'il divise; alors, *si, pour tout facteur premier* $\mathfrak{P}$ *de* $D_{K/k}$ *dans* K, $K'_{\mathfrak{p}'}$ *et* $K''_{\mathfrak{p}''}$ *sont latéraux, et si, pour tout idéal premier* $\mathfrak{P}$ *de* K *tel que* $N(\mathfrak{P}) \leqq \sqrt{|D_K|}$, $K'_{\mathfrak{p}'}$ *et* $K''_{\mathfrak{p}''}$ *coïncident* on a $K' = K''$ (on applique la conséquence précédente aux $G_{K/K'}$ et $G_{K/K''}$).

Afin de caractériser l'anneau principal ([1]) de k, je vais résumer les définitions et les résultats de ma théorie locale non abélienne des corps de classes, énoncés ou démontrés dans mes travaux antérieurs ([2]). On dira que quelque chose peut se vérifier ou se construire *finiment*, si cela est possible à l'aide d'un nombre fini d'opérations rationnelles. Soient k un corps de nombres $\mathfrak{p}$-adiques, $f(x)$, un polynome normé irréductible à coefficients entiers de k [l'irréductibilité

([1]) *Comptes rendus*, 225, 1947, p. 785, 973 et 1113.

([2]) *Mathematica* (Cluj), t. 13, 1937, p. 72-191; *Comptes rendus*, 206, 1938, p. 1534; **219**, 1944, p. 433; **220**, 1945, p. 28, 761; **221**, 1945, p. 37; **222**, 1946, p. 165, 581, 626, 984.

de $f(x)$ se vérifie finiment [3])], α un zéro de $f(x)$, $K=k(\alpha)$, $n=(K:k)$ le degré de $f(x)$. On peut déterminer finiment l'extension de restes R/r de K/k, son module de valuation $\mathfrak{M}$, l'ordre par rapport à l'idéal premier de $\mathfrak{P}$ de K de tout $\beta \in K$ donné, et l'on peut construire finiment un $\pi \in K$ d'ordre 1 en $\mathfrak{P}$ et, pour tout $\beta \in K$, déterminer pour toute puissance $\mathfrak{P}^u$ de $\mathfrak{P}$, un développement $\xi_i \pi^i + \xi_{i+1}\pi^{i+1} + \ldots + \xi_{u-1} t\pi^{u-1}$, tel que ξ_i, ξ_{i+1}, ..., ξ_{u+1} (i entier négatif, positif ou nul) soient des racines d'unité d'exposant premier à $\mathfrak{p}$ quand ils ne sont pas nuls, qui soit $\equiv \beta \pmod{\mathfrak{P}^u}$. On appelle *polygone de ramification* de $f(x)$ le polygone de Newton Π_f de $f(x+\alpha)$ [qui se construit finiment] et on note $\varphi_f(v)$ l'ordonnée de l'intersection avec l'axe des ordonnées de la droite de coefficient angulaire $-v$ qui touche Π_f. C'est une fonction strictement croissante de v, et sa fonction inverse sera notée $v_f(\varphi)$. $\Delta^{(f)} = -\operatorname{Log} v^{(f)}$ étant le minimum de la distance des zéros de $f(x)$ dans la fermeture algébrique valuée $\mathfrak{K}$ de k, on pose $\varphi_f = \varphi_f(v^{(f)})$.

Le polygone $f(x)$ est dit *discriminantiel* si l'idéal (D_f) engendré par son discriminant D_f est égal au discriminant $D_{K/k}$ de K/k, ce qui a lieu si, et seulement si $\alpha \equiv \xi_0 + \xi_1 \pi \pmod{\mathfrak{P}^2}$, où le reste de ξ_0 engendre R/r et où $\xi_1 \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}$. On vérifie donc finiment si un polygone donné est discriminantiel. Si $f(x)$ est discriminantiel, Π_f coïncide avec le *polygone de ramification* $\Pi_{K/k}$ *de* K/k, déterminé par ses nombres et hypergroupes de ramification [2], et, $\varphi_{K/k}(v)$, $v_{K/k}(\varphi)$, $v_{K/k}$, $\varphi_{K/k}$ étant la fonction $\varphi(v)$ relative au polygone $\Pi_{K/k}$, sa fonction inverse, le plus grand nombre de ramification fini de K/k, $\varphi_{K/k}(v_{K/k})$, on a $\varphi_f(v) = \varphi_{K/k}(v)$, $v_f(\varphi) = v_{K/k}(\varphi)$, $v^{(f)} = v_{K/k}$, $\varphi_f = \varphi_{K/k}$,

Soit S_k l'ensemble des polynomes normés irréductibles de k. On organise S_k en un espace ultramétrique [2] $S_k^{(a)}$, où a est une constante positive, en l'organisant par la distance $d_a(f, g)$ [*a-distance* de S_k] définie comme suit : n, u étant les degrés des $f(x)$, $g(x) \in S_k$ et $R(f, g)$ étant leur résultant, on pose $d_a(f, g) = |R(f, g)^{a:nu}|$, n étant un entier positif, $S_{k,n}$ désigne le sous-espace de $S_k^{(n)}$ formé par ses polynomes de degré n. J'ai démontré [2] que si $-\operatorname{Log} d_n(f, g) > \varphi_f$; $g(x)$ définit (à k-isomorphie près) une surextension de l'extension K/k définie par $f(x)$, et qu'il existe un $g(x) \in S_k$, ne définissant pas une surextension de K/k, tel que $-\operatorname{Log} d_n(f, g) = \varphi_f$. En particulier, quand $f(x)$ parcourt les polynomes minimaux dans k des entiers d'une extension finie K de k, φ_f atteint, pour les $f(x)$ discriminantiels, son minimum, qui est $\varphi_{K/k}$. On appelle *conducteur* de K/k le p. p. c. m. $\mathfrak{J}_{K/k}$ des diviseurs [2] $\mathfrak{J}$ de $S_k^{(n)}$, où $n=(K:k)$, tels qu'on puisse trouver un polynome minimal $f(x)$ dans k d'un entier de K et un $g(x) \in S_k$ ne définissant pas une surextension de K/k tels que $f(x) \equiv g(x)(\mathfrak{J})$. $|\mathfrak{J}|_n$ étant la valuation [2] de $\mathfrak{J}$ dans $S_k^{(n)}$, on a, visiblement, $|\mathfrak{J}_{K/k}|_n = e^{-\varphi_{K/k}}$. On associera au diviseur $\mathfrak{J}$ de $S_k^{(n)}$ l'idéal $\mathfrak{f}$ de $\mathfrak{K}$ tel que sa valuation $|\mathfrak{f}|$ dans $\mathfrak{K}$ soit $= |\mathfrak{J}|_n$. L'idéal $\mathfrak{f}_{K/k}$ de $\mathfrak{K}$

---

[3] Voir par exemple, O. Ore, *Math. Ann.*, 96, 1926, p. 313 et 97, 1926-1927, p. 569.

associé ainsi à $\mathfrak{J}_{K/k}$ sera dit aussi le conducteur de K/k, et la Führer-Diskriminantenformel de Hasse-Artin montre qu'il coïncide, dans les cas abélien et galoisien, avec le conducteur au sens habituel.

Quelque soit le vrai multiple $\mathfrak{J}$ et $\mathfrak{J}_{K/k}$, l'ensemble $\overline{E}_{K/k}$ des polynomes discriminantiels définissant K/k est une réunion E($\mathfrak{J}$; K/k) d'un nombre fini n(K/k; $\mathfrak{J}$) de classes suivant $\mathfrak{J}$ dans $S_{k,n}$. Étant donné un polynome discriminantiel $f(x)$ définissant une extension K/k de degré n, il est possible (²) de former finiment à partir de $f(x)$ un système complet de représentants des classes suivant $\mathfrak{J}$ appartenant à E($\mathfrak{J}$; K/k).

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Noyaux pseudo-reproduisants et complétion des classes hilbertiennes.* Note [1] de M. **Nachman Aronszajn.**

Nous reprenons les notations et définitions de notre Note précédente [2]. Nous y avons défini la notion d'un n. p.-r. pour une classe de fonctions relativement à une classe d'ensembles exceptionnels $\mathfrak{A}$, une mesure μ et un système μ-fondamental $\{U(x, \rho)\}$, en abrégé *rel.* $\{\mathfrak{A}, \mu, U\}$. Les propriétés I, II et III des n. r. [voir [2]] possèdent leurs analogues dans le cas des n. p.-r.

I′. S'il existe un n. p.-r. pour la classe F *rel.* $\{\mathfrak{A}, \mu, U\}$, il est unique à une fonction près dont l'intégrale par rapport à x (ou y) sur tout $U(p, \rho)$ est égale à o pour tous les y (ou x) *exc.* $\mathfrak{A}$.

II′. Pour énoncer le théorème d'existence des n. p.-r. pour une classe F *rel.* $\{\mathfrak{A}, \mu, U\}$, faisons correspondre à chaque fonction f de F la fonction définie sur le système d'ensembles $\{U\}$ prenant pour tout ensemble $U(x, \rho)$ la valeur égale à l'intégrale de f sur $U(x, \rho)$. On a ainsi une correspondance entre la classe F et une classe linéaire Φ des fonctions définies sur $\{U\}$. On transplante alors le produit scalaire de F sur Φ, ce qui fait de Φ une classe hilbertienne formant un espace de Hilbert et admettant un n. r. Celui-ci est une fonction des couples d'ensembles de $\{U\}$, c'est-à-dire des ensembles de la forme $U(x_1, \rho_1) \times U(x_2, \rho_2)$. Cette fonction peut être prolongée en une fonction additive d'ensembles dans $E \times E$. Le fait que cette fonction additive est absolument continue (par rapport à la mesure-produit $\mu \times \mu$) sur une suite croissante des sous-ensembles de $E \times E$ convergeant vers $E \times E$, caractérise le cas où il existe un n. p.-r. pour F.

Cette caractérisation permet de démontrer que la classe hilbertienne des fonctions de carrés sommables dans un domaine de l'espace euclidien (le choix de $\{\mathfrak{A}, \mu, U\}$ est alors évident et, pour $\mathfrak{A}$ et μ, unique), n'admet pas de n. p.-r.

III′*a*. Si $N(x, y)$ est le n. p.-r. de la classe F *rel.* $\{\mathfrak{A}, \mu, U\}$, on a :

(1). *Pour toute fonction μ-mesurable $g(x)$, l'intégrale sur* $E \times E$ *de* $N(x, y)\, g(x)\, g(y)$ *est* $\geqq 0$, *si seulement cette intégrale existe.*

---

[1] Séance du 9 février 1948.

III$'b$. Soit $N(x, y)$ une fonction satisfaisant à la condition 1° de la définition des n. p.-r. [voir ([2])] et à (1), relativement à une mesure μ et un système $\{U(x, \rho)\}$, en abrégé *rel.* $\{\mu, U\}$. Il existe alors au moins une classe $\mathfrak{A}$ et une classe de fonctions F telles que $N(x, y)$ soit le n. p.-r. de F *rel.* $\{\mathfrak{A}, \mu, U\}$. Ceci est vrai notamment pour la classe $\mathfrak{A}_\mu$ des ensembles de μ-mesure nulle qui est la plus grande des classes $\mathfrak{A}$ admissibles.

Le problème important concernant ce théorème est de chercher une classe admissible $\mathfrak{A}$ *aussi petite que possible*, éventuellement *la plus petite*. Pour préciser ce problème, introduisons quelques notions supplémentaires.

Une classe F, hilbertienne et normale *rel.* $\mathfrak{A}$ [voir ([1])], sera dite *hypernormale*, si de toute suite $\{f_n\} \subset F$ convergeant fortement vers $f \in F$, on peut extraire une suite convergeant au sens ordinaire vers f partout *exc.* $\mathfrak{A}$.

La classe F sera dite *saturée*, si toute fonction définie dans E *exc.* $\mathfrak{A}$ et égale partout *exc.* $\mathfrak{A}$ à une fonction de F, appartient à F.

La classe des fonctions de carré sommables dans un intervalle est hypernormale et saturée *rel.* à la classe des ensembles de mesure nulle.

Une classe formant un espace de Hilbert et hypernormale *rel.* $\mathfrak{A}^0$, où $\mathfrak{A}^0$ est la classe $\{(0)\}$ composée du seul ensemble vide, possède un n. r. (l'inverse est aussi vrai).

Soit $\overline{\mathfrak{A}} \supset \mathfrak{A}$ une classe d'ensembles exceptionnels et soit $\overline{F}$ une classe hilbertienne normale *rel.* $\overline{\mathfrak{A}}$, formant un espace de Hilbert et telle que : $F \subset \overline{F}$; sur F, le produit scalaire de $\overline{F}$ soit égal à celui de F; pour tout f de $\overline{F}$ il existe une suite $\{f_n\} \subset F$ convergeant fortement vers f et convergeant partout vers f (au sens ordinaire) *exc.* $\overline{\mathfrak{A}}$. La classe $\overline{F}$ sera dite une *complétée* de F *rel.* $\overline{\mathfrak{A}}$. L'opération de passage de F à $\overline{F}$ sera dite *complétion fonctionnelle* de F.

Si la complétée $\overline{F}$ est hypernormale ou saturée, on parlera d'une complétion hypernormale ou saturée *rel.* $\overline{\mathfrak{A}}$. S'il existe une complétée hypernormale *rel.* $\overline{\mathfrak{A}}$, il en existe une et une seule qui soit hypernormale et saturée *rel.* $\overline{\mathfrak{A}}$.

Le problème primordial de la complétion fonctionnelle est de trouver la plus petite classe $\overline{\mathfrak{A}}$, si elle existe, pour laquelle la complétion hypernormale soit possible; la complétée hypernormale et saturée correspondante sera appelée *parfaite*; c'est alors la plus petite classe parmi toutes les complétées hypernormales et saturées.

Revenons maintenant aux conditions du théorème III$'$ b. Considérons les combinaisons linéaires $g(x)$ d'un nombre fini des fonctions caractéristiques des ensembles $U(x, \rho)$. Désignons par F_0 la classe des fonctions

$$f_g(x) = \int_E N(x, y)\, g(y)\, d\mu_y$$

([2]) *Comptes rendus*, 226, 1948, p. 456.

munie du produit scalaire

$$[f_g, f_h] = \iint_{E \times E} N(x, y)\, h(x)\, g(y)\, d\mu_x d\mu_y.$$

C'est une classe hilbertienne normale *rel.* $\mathfrak{A}_\mu$, mais elle peut être normale *rel.* à une classe plus petite; dans beaucoup de cas elle le sera *rel.* $\mathfrak{A}^0 = \{(o)\}$. F_0 admet une (et une seule) complétée F hypernormale et saturée *rel.* $\mathfrak{A}_\mu$, et cette classe F admet $N(x, y)$ comme n. p.-r. *rel.* $\{\mathfrak{A}_\mu, \mu, U\}$.

Le problème intéressant est de savoir, dans le cas où F_0 admet une complétée hypernormale *rel.* à une classe $\overline{\mathfrak{A}}$ plus petite que $\mathfrak{A}_\mu$, si cette complétée admet $N(x, y)$ comme n. p.-r. *rel.* $\{\overline{\mathfrak{A}}, \mu, U\}$. Si F_0 admet une complétée F hypernormale *rel.* $\mathfrak{A}^0$, F est évidemment la complétée parfaite de F_0. De plus, F possède un n. r. (voir plus haut) qui est égal à $N(x, y)$ à un ensemble de mesure nulle dans $E \times E$ près.

Le théorème III$'b$ nous permet de construire un grand nombre des classes admettant un n. p.-r. Par exemple, si E est un domaine dans un espace euclidien et $N(x, y)$ le noyau d'un opérateur intégral défini positif, $N(x, y)$ est un n. p.-r. pour une classe de fonctions.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Équations différentielles linéaires hyperboliques à coefficients constants.* Note de M. **Lars Gårding**, présentée par M. Jacques Hadamard.

Soit $n > 0$ et soit $q(\zeta) = q(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ un polynome à coefficients réels ou complexes qui n'est pas fonction de $l < n$ combinaisons linéaires des ζ_k, et soient u et f des fonctions réelles ou complexes des n variables réelles $x_1, \ldots, x_n$. Considérons l'équation aux dérivées partielles

$$q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u = f. \tag{1}$$

Nous posons $q = p + r$ où p est homogène de degré m, le degré de r étant inférieur à m. Nous disons que q est hyperbolique par rapport au vecteur réel $\overline{\xi} = (\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_n)$ si $p(\overline{\xi}) \neq 0$ et s'il existe un nombre réel t_0 tel que $q(t\overline{\xi} + i\eta) \neq 0$ pour tout vecteur réel η quand $t > t_0$. On déduit de ces conditions que $p(t\overline{\xi} + i\eta) \neq 0$ pour tout t réel et $\neq 0$ et de là la propriété équivalente que $p(t\overline{\xi} + \eta)$ s'annule pour m valeurs réelles $-u_k(\overline{\xi}, \eta)$ de t. C'est la dernière propriété qui, avec quelques restrictions, constitue la définition du caractère hyperbolique donnée, pour le cas particulier des polynomes homogènes, par M. Herglotz et M. Petrowsky [1]. Soit Γ l'ensemble

[1] *Rec. Math.*, N. S., 17, 1945, p. 289-367.

des ξ tels que tout $u_k(\overline{\xi}, \xi) > 0$, ou plus brièvement, $\Gamma = [\xi; u_k(\overline{\xi}, \xi) > 0]$. On trouve que Γ est l'intérieur d'un cône convexe contenant $\overline{\xi}$. On peut aussi montrer que q est hyperbolique par rapport à tout $\xi \in \Gamma$ et que dans la définition de Γ tout $\xi \in \Gamma$ peut remplacer $\overline{\xi}$.

Si $\xi - t_0 \overline{\xi} \in \Gamma$ et $\mathrm{R}\alpha > n$, $q(\xi + i\eta)^{-\alpha}$ est la transformée de Fourier-Laplace d'une fonction continue $Q(\alpha, x)$ qui est nulle en dehors d'un cône convexe C, à savoir l'intérieur du domaine $[x; (x, \xi) = x_1\xi_1 + \ldots > 0, \xi \in \Gamma]$. En effet, on a avec $\zeta = \xi + i\eta$,

$$(2) \qquad q(\zeta)^{-\alpha} = \int Q(\alpha, x)\, e^{-(\zeta, x)}\, dx, \qquad Q(\alpha, x) = (2\pi)^{-n} \int q(\zeta)^{-\alpha} e^{(\zeta, x)}\, d\eta,$$

où les intégrales s'étendent à l'espace entier. Quand $q = \zeta_1^2 - \zeta_2^2 - \ldots - \zeta_n^2$, (1) devient l'équation des ondes. Dans ce cas q est hyperbolique par rapport à tout $\overline{\xi}$ tel que $q(\overline{\xi}) > 0$; Γ et C sont tous les deux identiques au domaine $[\xi;\ \xi_1\overline{\xi}_1 > 0,\ q(\xi) > 0]$. Quant à $Q(\alpha, x)$ on retrouve le noyau de M. M. Riesz (²); $q(x)^{\alpha-(1/2)n}/\pi^{(1/2)(n-2)}\, 2^{2\alpha-1}\, \Gamma(\alpha)\, \Gamma[\alpha - (1/2)(n-2)]$, $(x \in C)$.

Comme l'a fait M. Riesz pour l'équation des ondes, on peut utiliser $Q(\alpha, x)$ pour résoudre le problème de Cauchy pour (1). Soient $c_k = c_k(s_2, \ldots, s_n)$ n fonctions réelles des $n - 1$ variables réelles $s_2, \ldots, s_n$ qui sont de la classe C_r $[r = (n+1)m]$, quand $|s_k| < 1$. Écrivons le déterminant ayant pour lignes t_k, $\partial c_k/\partial s_2, \ldots, \partial c_k/\partial s_n$ sous la forme $t_1\gamma_1 + \ldots + t_n\gamma_n$ et supposons que, pour un ordre convenable de ces lignes, le vecteur $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \Gamma$. Les équations $x_k = c_k$ définissent donc une surface S qui a une orientation d'espace. Soit A un ensemble ouvert des x tel que toute ligne droite $y(t) = x - tz$, $(x \in A,\ z \in C)$, coupe S en un point $y(t')$ avec $t' > 0$ et que tout $y(t)$ avec $0 \leq t < t'$ appartient à A. Soit A′ un ensemble ouvert contenant la fermeture de A et soient f et h des fonctions de la classe C_r dans A′. Posons, avec M. Riesz, quand $x \in A$ et $\mathrm{R}\alpha > n$,

$$I^\alpha f(x) = \int_A Q(\alpha, x - y)\, f(y)\, dy.$$

La formule (2) donne immédiatement

$$(3) \qquad q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) I^{\alpha+1} f(x) = I^\alpha f(x).$$

On peut montrer que $I^\alpha f(x)$ est, pour tout x, une fonction holomorphe de α quand $\mathrm{R}\alpha \geq 0$, que (3) reste encore valable et qu'on a $I^0 f(x) = f(x)$. Toutes les dérivées de $I^1 f(x)$ d'ordre inférieur à m tendent vers zéro

(²) *Soc. Math. de France*, Conférence de la Réunion internat. des math. tenue à Paris en juillet 1937, Paris 1939.

quand $x \to S$, ce que nous écrivons $I^1 f(x) \xrightarrow{(m)} 0$, $(x \to S)$. Par conséquent

$$u(x) = I^1 f(x) + h(x) - I^1 q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) h(x)$$

est une solution de (1) dans A telle que $u(x) - h(x) \xrightarrow{(m)} 0$, $(x \to S)$, et l'on peut montrer qu'elle est la seule avec cette propriété. Quant à $I^1 f(x)$, on peut l'écrire sous forme explicite en utilisant (3).

Ajoutons que si p est hyperbolique dans notre sens, tandis que q ne l'est pas, le problème de Cauchy considéré n'est pas correctement posé quand S est n'importe quel plan $(x, \xi) = 0$, $(\xi \in \Gamma)$.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Échelle spectrale et intégration des êtres fonctionoïdes.* Note [1] de M. **Otton Martin Nikodym**, présentée par M. Paul Montel.

8. Reprenons les notations et notions de deux Notes précédentes [2]. Soit $\alpha_n \in (B')$ et supposons que $\alpha_1 \subset \alpha_2 \subset \ldots$ converge vers $\alpha \in (B')$; on a alors $\alpha = \Sigma'_n \alpha_n$ [somme somatique dans (B')], $\alpha_1\beta \subset \alpha_2\beta \subset \ldots$ converge vers $\alpha_n\beta$ et $\alpha\beta = \Sigma'_n \alpha_n\beta$. Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$ converge et $\alpha_i . \alpha_k = \theta$, $(i \neq k)$, $\beta_n \subset \alpha_n$, alors $\beta_1 + \beta_2 + \ldots$ converge, $\alpha_{k(1)} + \alpha_{k(2)} + \ldots$ où $k(1) < k(2) < \ldots$ converge et la série $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$ converge vers la même limite si l'on change l'ordre des termes ou bien si on la transforme en une série double et réciproquement. Ces résultats seront utilisés au paragraphe 10.

9. Nous allons introduire des êtres fonctionoïdes ayant des bases arbitraires. Dans ce but introduisons, en employant une idée de M. Fréchet, la notion suivante *d'écart de deux agrégats* x, y, quelconques.

$$|x, y| = \|x - y\| + \|\text{bas}\, x, \text{bas}\, y\|.$$

On a $|x, y| = 0$, si et seulement si $x = y$; $|x, y| \leq |x, z| + |z, y|$. Définissons $|x| = |0.\theta, x|$. On a $|x| = \|x\| + \mu(\text{bas } x)$; $|x, y| = |x - y|$; $|x + y| \leq |x| + |y|$, $\|x - y\| \leq |x, y|$.

Une suite $\{\chi_n\}$ s'appelle *fondamentale* (S. F.) [resp. *nulle* (S. N.)] lorsque $|x_n, x_m| \to 0$ [resp. $|x_n| \to 0$].

Pour que $\{x_n\}$ soit une S. F. (resp. S. N.), il faut et il suffit que $\{x_n^\star\}$ et $\{\text{bas } x_n\}$ soient une s. f. resp. s. n.

En partant des nouvelles S. F., le procédé de complétion s'accomplit comme d'habitude et fournit des *êtres fonctionoïdes* (E. F.) $\xi, \eta, \zeta \ldots$ dont l'ensemble sera désigné par (A''').

Définissons $\xi^\star$, bas ξ et $\|\xi\|$ par $\{x_n^\star\}$, $\{\text{bas } x_n\}$ et lim $\|x_n\|$ où $\xi \sim \{x_n\}$. Les

---

(1) Séance du 2 février 1948.

(2) *Comptes rendus*, **226**, 1948, p. 375 et 458.

propriétés de $\|\xi\|$, bas ξ et ξ^* sont les mêmes que pour les agrégats. Soit (B') la tribu obtenue de (B) par la complétion au moyen de l'écart $\|a, b\|$. Si $\alpha \in (B')$, définissons $\lambda\alpha$ par la S. F. $\{\lambda . a_n\}$ où $\alpha \sim \{a_n\}$; on a $\lambda\alpha \in (A''')$. Les E. F. $\in (A''')$ vérifient tous les axiomes des agrégats (Note I) sauf VI. (A''') contient une partie isomorphe à (A''). Les (A''') sont des analogues de fonctions mesurables définies presque partout dans des sous-ensembles mesurables de l'ensemble total.

10. Pour confronter nos ê. f. p. avec les ê. f. connus dans la littérature, nous allons construire leurs échelles spectrales. Mais d'abord introduisons des êtres fonctionoïdes *simples*. Nous ne considérerons dans ce qui va suivre que des E. F. basées dans $\{I\}$. Soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \in (B')$ une suite telle que $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$ converge vers $\{I\}$. Dans ce cas $\{\xi_n\} = \{\lambda_1\alpha_1 + \ldots + \lambda_n\alpha_n\}$ converge quels que soient les λ_n. Soit $\xi = \lim \xi_n$. Un tel E. F. s'appellera *être fonctionoïde simple* (E. F. S.), on écrira $\Sigma_i \lambda_i \alpha_i$.

Soit $\xi = \Sigma_i \lambda_i \alpha_i$ un E. F. S. et λ un nombre; les sommes $\Sigma(\lambda_i \geqq \lambda)\alpha_i$, $\Sigma(\lambda_i > \lambda)\alpha_i$ convergent et représentent des somata de (B') que nous écrirons resp. $\hat{\alpha}\{\xi \geqq \{\lambda I\}\}$, $\hat{\alpha}\{\xi > \{\lambda I\}\}$. Si ξ est un E. F. S., $\|\xi\| = d$ est l'unique nombre satisfaisant à l'inégalité $\mu\hat{\alpha}\{|\xi| > \{dI\}\} \leqq d \leqq \mu\hat{\alpha}\{|\xi| \geqq \{dI\}\}$.

11. Pour tous E. F. ξ (basée dans $\{I\}$) il existe des suites $\psi_1 > \psi_2 > \ldots$, $\varphi_1 < \varphi_2 < \ldots$ de E. F. S. convergeant uniformément vers ξ et telles qu'il existe une suite $0 < \varepsilon_n \to 0$ où $\varphi_{n+1} - \varphi_n \geqq \{\varepsilon_n I\}$, $\psi_n - \psi_{n+1} \geqq \{\varepsilon_n I\}$, (*suites approximantes* (s. a.) *de* ξ. Posons $\alpha_n(\lambda) = \hat{\alpha}\{\varphi_n \geqq \lambda\}$. On a $\alpha_{n+1}(\lambda) \subset \alpha_n(\lambda)$, mais $\{\alpha_n(\lambda)\}$ ne converge pas nécessairement, comme on peut en donner un exemple. M. Mac Neille [3] a démontré que (B') peut être étendue par la méthode de section, de manière à devenir une tribu de Boole (B'') complètement additive et avec conservation de toutes sommes et produits somatiques finis ou infinis de (B'). Dans (B'') le produit $\Pi''_n \alpha_n(\lambda)$ existe et ne dépend pas du choix de la s. a. $\{\varphi_n\}$. Posons $E(\lambda) = \Pi''_n \alpha_n(\lambda)$ et appelons-le *échelle spectrale de* ξ. Convenons d'écrire $E(\lambda = \hat{\alpha}''\{\xi \geqq \{\lambda I\}\}$. On a $E(\lambda') \subset E(\lambda'')$ lorsque $\lambda' \leqq \lambda''$; si $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \to \infty$, on a $\Sigma''_n E(\lambda_n) = I^\alpha$ et, si $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots \to -\infty$, on a $\Sigma''_n E)\lambda_n) = \theta$; si $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \ldots \to \lambda_0$, on a $E(\lambda_0) = \Pi''_n E(\lambda_n)$. Chaque E. F. a une échelle spectrale dans (B''), mais il n'est pas vrai que chaque succession $F(\lambda) \in (B'')$ jouissant des propriétés ci-dessus correspond à un E. F. On a ainsi retrouvé des ê. f. de Carathéodory et Wecken. On peut démontrer que $\|\xi\| = d$ est l'unique nombre pour lequel $\mu''\hat{\alpha}''\{|\xi| > \{d'I\}\} \leqq d \leqq \mu''\hat{\alpha}'\{|\xi| \geqq \{d'I\}\}$ où la mesure μ'' se définit par la limite, par exemple, $\lim_n \mu[\alpha_n(\lambda)]$.

12. *Intégration* des ê. f. p. Supposons que, sur (B), $\mu(a+b) = \mu(a) + \mu(b)$ lorsque $a.b = 0$. Dans ce cas (*Mac Neille*), la mesure dans (B') devient dénom-

---

(3) *Partially ordered sets* (*Trans. Am. Math. Soc.*, **43**, 1937).

brablement additive et même complètement additive (*Wecken*). L'intégrale $\int \xi d\mu$ se définit par l'intégrale de Stieltjes $\int \lambda d\mu E(\lambda)$, mais elle est égale à $\lim_n \Sigma_i \lambda_{in} \mu(a_{in})$ dans le cas où $\xi \geqq \{0.I\}$ et $0.I \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \to \xi$, $\xi_n = \Sigma_i \lambda_{in} a_{in}$, en supposant que cette limite existe. Les intégrales ont le type de Fréchet (*Bull. Soc. Math. France*, 43, 1915).

13. Les ê. f. expliquent certains phénomènes observés sur des intégrales de Stieltjes ordinaires $\int f(x)\, dg(x)$, où $g(x)$ est monotone et discontinue dans $(0, 1) = \hat{x}\{0 < x \leqq 1\}$. Les intervalles (α, β) semifermés et leurs sommes finies constituent une tribu simplement additive de Boole (B).

Si l'on pose $\mu(\alpha, \beta) = g(\beta) - g(\alpha)$ et que l'on complète (B), la tribu (B') ainsi obtenue contiendra, outre des ensembles, des somata qui *ne sont pas des ensembles de points* (découverts par *Mac Neille*). Les ê. f. respectifs seront des fonctions plus amples que $f(x)$, parce que l'ensemble $(0, 1)$ sera enrichi par des *points* abstraits intercalés ce qui permet de transformer l'intégrale de Stieltjes en une intégrale ordinaire du type de Lebesgue-Fréchet.

Remarquons enfin qu'on peut construire une théorie des ê. f. en admettant des normes différentes par exemple : $\|x\|_1 = \sup x$, $\|x\|_2 = \Sigma_i |\lambda_i| \mu(a_i)$, $\|x\|_3 = \sqrt[p]{\Sigma_i |\lambda_i|^p \mu(a_i)}$ où $p \geqq 1$. Pour $p = 2$ et λ_i complexes, les ê. f. forment un espace de Hilbert-Hermite.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions orthogonales d'Hermite dérivées d'une exponentielle quadratique. Valeur asymptotique*. Note [1] de M. **Albert Tortrat**, présentée par M. Joseph Pérès.

Les relations qui suivent généralisent des propriétés connues dans le cas d'une variable

$$(1)\quad \begin{cases} 4\,\xi_i \mathcal{H}^2_{n_1,\ldots,n_r} = \dfrac{\partial}{\partial \xi_i} \mathcal{H}^2_{\ldots,n_i+1,\ldots} + \dfrac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{H}^2_{n_1,\ldots,n_r} \quad (^2), \\ -4x_i\, f^2_{n_1,\ldots,n_r} = \dfrac{\partial}{\partial x_i} f^2_{\ldots,n_i-1,\ldots} + \dfrac{\partial}{\partial \xi_i} f^2_{n_1,\ldots,n_r} \quad (^3). \end{cases}$$

Aucune sommation n'est à faire dans ces formules, un seul indice, n_i est modifié par rapport aux indices initiaux, dans chaque équation

(1) Séance du 9 février 1948.

(2) Rappelons les notations $\varphi = \alpha_{ij} x_i x_j = \beta_{ij} \xi_i \xi_j$, $\xi_i = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \alpha_{ij} x_j$.

(3) $f_{n_i} = e^{-\frac{\varphi}{2}} \psi_{n_i} = e^{-\varphi} \mathcal{H}_{n_i}$ discriminant $D = |\alpha_{ij}|$,

$$f_{n_i} = \frac{(-1)^{\Sigma n_i}}{a_{n_i}} \frac{\partial^{\Sigma n_i}}{\partial x_i^{n_i}} e^{-\varphi}, \qquad a^2_{n_i} = \pi^2_{n_i}!\, A, \qquad A = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{D}}.$$

A partir du deuxième groupe de formules on démontre que

$$-2\Big[f_{n_i}^2\,d\varphi+\sum_{i}(\delta_i f_{n_i-1}^2\,d\varphi_i)+\ldots+\sum_{i,j,\ldots,l}(\delta_{i,j,\ldots,l}\,f_{n_i-1,\ldots,n_l-1}^2\,d\varphi_{i,j,\ldots,l})$$
$$+\sum_{i_1,\ldots,i_{r-1}}\delta_{i_1,\ldots,i_{r-1}}\,f_{n_{i_s}-1,\ldots,n_{i_{r-1}}-1}\,d\varphi_{i_s,\ldots,i_{r-1}}\Big]$$
$$=d\Big[f_{n_i}^2+\sum_{i}\delta_i f_{n_i-1}^2+\sum_{i,j}\delta_{i,j}\,f_{n_i-1,n_j-1}^2+\ldots+\mathrm{D}\,f_{n_s-1,\ldots,n_r-1}^2\Big];$$

d désigne devant les φ ou le crochet les différentielles de ces expressions.

$\delta_{i,j,\ldots,l}$ désigne un mineur du déterminant D formé avec les lignes $i, j, \ldots, l$ et les colonnes de mêmes indices; tous ces δ sont >0 lorsque φ est supposée définie >0.

$\varphi_{i_1,\ldots,i_h}$ est une forme quadratique définie >0 des variables $x_{i_{h+1},\ldots,i_r}$; exactement c'est la forme réciproque de la forme $\psi(\xi_i)\equiv\varphi(x_i)$ dans laquelle on fait $\xi_{i_1}=\ldots=\xi_{i_h}=0.\big(\psi(\xi_{i_{h+1}},\ldots,\xi_{i_r})\big)$. On a d'ailleurs

$$\varphi(x_i)\equiv\varphi_{i_1,\ldots,i_h}(x_{i_{h+1}},\ldots,x_{i_r})+\psi_{i_1,\ldots,i_h}(\xi_{i_1},\ldots,\xi_{i_h}),$$

$\psi_{i_1,\ldots,i_h}$ étant forme réciproque de $\varphi(x_{i_1},\ldots,x_{i_h})$ $(x_{i_{h+1}}=\ldots=x_{i_r}=0)$. En conséquence le crochet a pour des x quelconques une valeur inférieure à celle qu'il possède à l'origine des coordonnées. D'autre part on trouve que

$$f_{n_i}^2(0)\leq\pi\,\frac{[n_i\,!]\,\alpha_{ii}^{n_i}}{[p_i!]^r}\,\frac{\sigma^{\Sigma n_i}}{\mathrm{A}\,r_{\Sigma n_i}}$$

avec $p_i=n_i/2$ si n_i est pair, $(n_i-1)/2$ si n_i est impair.

$$\sigma=1+r\sum\frac{|\alpha_{ij}|}{\sqrt{\alpha_{ii}\alpha_{jj}}},\qquad \mathrm{A}=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\mathrm{D}}},$$

soit $f_{n_i}^2(0)\leq k(\mathrm{M}\sigma)^{\Sigma n_i}/\pi\sqrt{n_i}$, avec $k=1/\sqrt{\mathrm{A}}$ $(\alpha_{ii}\leq\mathrm{M}\quad n_i>1)$ d'ailleurs pour Σn_i pair, $f_{n_i}(0)=0$, d'où

$$f_{n_i}^2(x_i)\leq\frac{\mathrm{K}(\mathrm{M}\sigma)^{\Sigma n_i}}{\Pi\sqrt{n_i}},\qquad \mathrm{K}=\frac{e\,r\,!}{\sqrt{\mathrm{A}}}.$$

La série $\sum_0^\infty \Pi\, t_i^{n_i}\,\psi_{n_i}^2(x_i)$ converge absolument pour $|t_i|<1/\mathrm{M}\sigma$, résultat plus précis que celui obtenu précédemment ([4]). On a des résultats analogues pour les $g_{n_i}=e^{-\varphi}\mathcal{G}_{n_i}$ puisqu'il suffit de changer φ en ψ et x_i en ξ_i. Des relations analogues à (1) s'obtiennent pour les $\mathcal{H}_{n_i}\,\mathcal{G}_{n_i}$ ou $f_{n_i}\,g_{n_i}$.

Intégration du système aux dérivées partielles satisfait par les f_{n_i}. —

([4]) Cf. *Comptes rendus*, 226, 1948, p. 298.

Soit $f_{n_i} = (\partial^{\Sigma n_i}/\partial x_{n_i})F$; F satisfait quels que soient les n_i au système

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial \xi_i} + 2x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + 2F = 0 \qquad (i=1,\ i=2,\ \ldots,\ i=r),$$

système déjà étudié et intégré pour $r=2$ ([5]).

Ce système est complètement intégrable, c'est-à-dire que si on le remplace par un système aux différentielles totales à 2^r équations, les 2^r inconnues étant F et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre r, la dérivation n'intervenant jamais plus d'une fois par rapport à une même variable, la dernière équation donnant $d(\partial^r F/\partial x_1 \ldots \partial x^r)$ vérifie les conditions classiques de compatibilité.

D'après Lauricella (cf. Appell et Kampé de Fériet, réf. citée), la solution générale dépend linéairement de r^r constantes. On peut pour procéder à l'intégration et obtenir les r^r solutions linéairement indépendantes les plus simples procéder ainsi; posons $Fe^{\varphi} = Z$, le problème équivaut à celui-ci, trouver Z tel que, quels que soient $i_1, \ldots, h_h$, on ait (avec $h \leqq r$, $i_1 \neq i_u$, ...)

$$\frac{\partial^h Z}{\partial \xi_{i_1}, \ \ldots, \ \partial \xi_{i_h}} = e^{\varphi} z_{i_1,\ldots,i_h} = Z_{i_1,\ldots,i_h},$$

$z_{i_1,\ldots,i_h}$ ne contenant aucune des variables $x_1, \ldots, x_h$.

Soit alors $i_1, \ldots, i_h$ une combinaison donnée de h des indices $1, \ldots, r$.

On partira de $Z_{i_1 i \ldots, i_h} = e^{\psi_{i_1,\ldots,i_h}(\xi_{i_1},\ldots,\xi_{i_h})}$ (cf. ci-dessus la signification de $\psi_{i_1\ldots}$), $Z_{j_1,\ldots,j_h} = 0$, pour toute autre combinaison différente de la première.

Par intégration les conditions ci-dessus nous conduisent à une solution bien déterminée. Il y a C_r^h solutions semblables à celles-ci, obtenues par une permutation des variables, et h variant de 0 à r, on obtient les r^r solutions cherchées. $Z=1$ donne les polynomes ou fonctions d'Hermite et l'on voit que les premiers constituent la seule solution polynomiale du système d'équations aux dérivées partielles correspondant.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur les valeurs algébriques d'une fonction algébroïde.* Note de M. **Nicolas Baganas**, présentée par M. Paul Montel.

1. Soit $u(z)$ une fonction transcendante algébroïde à n branches et $b(z)$ une fonction algébrique à m branches distinctes.

Nous dirons, avec M. P. Montel, que la fonction $u(z)$ admet comme exceptionnelle la fonction $b(z)$ si elle ne prend qu'un nombre fini de fois les valeurs de cette fonction $b(z)$ pour la même valeur de z.

Théorème. — *Si la fonction $u(z)$, d'ordre fini, admet comme exceptionnelle la fonction $b(z)$, on a*

$$m \leqq 2n.$$

([5]) Cf. Appel et Kampé de Fériet, *Sur les séries hypergéométriques et polynomes d'Hermite.*

Nous avons démontré ce théorème en suivant la voie élémentaire de M. É. Borel reposant sur l'impossibilité de certaines identités. Nos raisonnements n'exigent nullement que l'équation définissant la fonction $b(z)$ soit irréductible.

En supposant $n=1$, nous retrouvons le théorème de M. P. Montel : toute fonction transcendante méromorphe dans le plan, prend une infinité de fois les valeurs de toute fonction algébrique qui admet au moins trois déterminations [1].

2. Supposons que la fonction transcendante algébroïde à n branches admette comme exceptionnelles les fonctions algébriques $a_\lambda(z)$, $a_\mu(z)$ à λ et μ branches respectivement.

Théorème. — *Si l'équation définissant $a_\mu(z)$ est irréductible et si les points de ramification de cette fonction sont* distincts *de ceux de la fonction $a_\lambda(z)$, on a*

$$\mu \leq n.$$

Corollaire I. — *Si l'équation définissant $a_\mu(z)$ est irréductible et si $\lambda=1$, on a*

$$\mu \leq n.$$

Corollaire II. — *Si la fonction algébrique $b(z)$ à m branches, définie par une équation irréductible, est exceptionnelle pour la fonction transcendante algébroïde $u(z)$ à n branches, on a*

$$m \leq n,$$

si le nombre des zéros (ou celui des pôles) de $u(z)$ est limité.

3. Supposons que la fonction exceptionnelle $b(z)$ soit définie par une équation de la forme

$$A_1(u, z).A_2(u, z)\ldots A_\lambda(u, z)=0,$$

où $A_1, A_2, \ldots, A_\lambda (\lambda \geq 2)$ désignent des polynomes indécomposables en u et z. Soit m_i le degré par rapport à u du polynome A_i.

Théorème. — *Si les degrés $m_1, m_2, \ldots, m_\lambda$ sont premiers entre eux, chacun d'eux ne dépasse pas n.*

4. Soit $u(z)$ une algébroïde transcendante à n branches d'ordre ρ et $v(z)$ une algébroïde (transcendante ou algébrique) d'ordre $\sigma<\rho$, à m branches distinctes.

Nous dirons que $u(z)$ admet $v(z)$ comme exceptionnelle, au sens de Borel-Montel, si l'ordre réel des points où les fonctions $u(z)$, $v(z)$ prennent la même valeur est plus petit que ρ.

Théorème. — *Si $u(z)$ admet $v(z)$ comme exceptionnelle au sens de Borel-Montel, on a*

$$m \leq 2n.$$

---

(1) *Sur les valeurs algébriques d'une fonction entière ou méromorphe* (*Journal de Math. pures et appliquées*, 106, 1941, p. 305-324).

TOPOLOGIE. — *Sur les espaces uniformisables ordonnés.*
Note [1] de M. **Léopoldo Nachbin**, présentée par M. Élie Cartan.

Un espace topologique E muni d'un pré-ordre est dit *uniformisable pré-ordonné* si : 1° l'ensemble des images réciproques des parties ouvertes de la droite par les fonctions réelles continues croissantes sur E est un système de générateurs de la topologie, et 2° $a \leq b$ étant faux, il existe une telle fonction φ pour laquelle $\varphi(a) > \varphi(b)$; alors que le pré-ordre est fermé et la topologie est convexe. Un espace compact ordonné K est dit une *compactification* d'un espace topologique E muni d'un ordre si : 1° E est un sous-espace topologique dense ordonné de K, et 2° parmi les relations d'ordre fermées sur K pour lesquelles E est un sous-espace ordonné, la relation donnée est celle ayant le plus petit graphique [2]. Deux compactifications K_1, K_2 de E sont *équivalentes* s'il existe un homéomorphisme $\varphi : K_1 \rightleftarrows K_2$ tel que $\varphi(x) = x$ pour $x \in E$; φ est un isomorphisme d'ordre. Posons $K_1 \geq K_2$ s'il existe une fonction continue $\varphi : K_1 \to K_2$ telle que $\varphi(x) = x$ pour $x \in E$; φ est croissante et $\varphi(K_1 - E) = K_2 - E$. On a $K_1 \geq K_2$, $K_2 \geq K_1$ si et seulement si K_1 est équivalente à K_2. De plus, toute famille non vide $\{K_\lambda\}$ de compactifications de E possède une borne supérieure $K = \bigcup_\lambda K_\lambda$, unique à une équivalence près, telle que $K \geq K_\lambda$ et si $K' \geq K_\lambda$ alors $K' \geq K$.

1° *Un sous-espace d'un espace compact ordonné est un espace uniformisable ordonné.* 2° *Tout espace uniformisable ordonné* E *possède une compactification* $\beta(E)$ [3], *unique à une équivalence près, ayant les propriétés équivalentes suivantes : a.* $\beta(E) \geq K$ *pour toute compactification* K *de* E; *b. toute fonction réelle continue croissante bornée sur* E *a une extension de cette nature définie sur* $\beta(E)$; *c. toute fonction continue croissante sur* E *à valeurs dans un espace compact ordonné a une extension de cette nature définie sur* $\beta(E)$.

En particulier tout espace compact ordonné (resp. uniformisable ordonné) est isomorphe à un sous-espace topologique ordonné fermé (resp. quelconque) d'un produit d'intervalles fermés [0,1].

---

[1] Séance du 9 février 1948. Cette Note fait suite à une Note récente à laquelle le lecteur est prié de se reporter.

[2] Il suffit que l'adhérence dans K^2 du graphique de l'ordre de E soit le graphique de l'ordre de K; dans le cas général il faut remarquer que la relation sur K dont le graphique est cette adhérence peut cesser d'être transitive.

[3] Pour le cas de l'ordre discret, voir : A. Tychonoff, *Math. Annalen* Bd., 102, 1930, p. 544-561; E. Čech, *Ann. of Math.*, 38, 1937, p. 823-844; M. H. Stone, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 41, 1937, p. 375-481.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — *Variétés arithmétiquement normales et variétés de première espèce.* Note (1) de M. **Paul Dubreil**, présentée par M. Gaston Julia.

Rappelons qu'un idéal homogène $\mathfrak{a}$ de l'anneau $R_n = K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, où K désigne un corps commutatif algébriquement fermé, est dit *de première espèce*, si, Φ étant une forme n'appartenant à aucun des idéaux premiers essentiels de $\mathfrak{a}$, l'idéal $\mathfrak{a} + (\Phi)$ n'a pas de composant primaire *impropre*, c'est-à-dire appartenant à l'idéal premier $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ (2). Une variété algébrique V de l'espace projectif P_n sur K est de première espèce si l'idéal $\mathfrak{a}_V$ associé à cette variété (c'est-à-dire engendré par toutes les formes nulles sur V) est de première espèce : géométriquement, cette propriété permet d'étendre le théorème de Noether $Af + B\varphi$, à l'intersection de V et d'une hypersurface $\Phi = 0$.

Si V est *irréductible*, $\mathfrak{a}_V$ est un idéal *premier* $\mathfrak{p}$ et l'anneau des classes résiduelles $R_n/\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ est un domaine d'intégrité, *noethérien* comme R_n (3). Si $\mathfrak{o}$ est en outre *intégralement fermé* (4), V est dite *arithmétiquement normale* (5).

Les notions de variété de première espèce et de variété arithmétiquement normale sont distinctes, car les variétés de première espèce peuvent être décomposées et leurs singularités n'ont pas nécessairement les mêmes propriétés que celles d'une variété arithmétiquement normale V (on sait notamment que si V est de dimension *d*, sa variété singulière a la dimension *d*-2 *au plus*) (6). Cependant, Muhly a montré (7) que les variétés arithmétiquement normales sont celles sur lesquelles les hypersurfaces d'ordre *l* découpent, pour toute valeur de *l*, un système complet, et R. Apéry a indiqué pour les variétés irréductibles de première espèce le même critère, mais avec la restriction de regarder les singularités de la variété comme *virtuellement inexistantes*. Ce rapprochement permet déjà de conclure que, *pour une variété irréductible dépourvue de singularités, les propriétés d'être arithmétiquement normales et de première espèce coïncident*. En me proposant de comparer directement ces deux notions, toutes

---

(1) Séance du 19 janvier 1948.

(2) Dès que cette propriété est vraie pour une telle forme Φ, elle est vraie pour toute autre forme Φ' vérifiant la même condition : c'est donc bien une propriété de l'idéal $\mathfrak{a}$. Cf. P. Dubreil, *Sur quelques propriétés des variétés algébriques* [*Actualités scient. et ind.*, n° **162**, (Paris, 1935) et *Journal de Math.*, 9e série, **15**, 1936, p. 271-283].

(3) C'est-à-dire vérifiant l'*axiome des chaînes de diviseurs*, Cf. B. L. van der Waerden, *Modern Algebra*, II, p. 20 (2e éd.).

(4) Cf. B. L. van der Waerden, *Modern Algebra*, II, p. 78.

(5) D'abord sous le nom de variétés normales, les variétés arithmétiquement normales ont été introduites par O. Zariski, *Some results in the arithmetic Theory of algebraic varieties* (*Amer. Journ. of Math.*, **61**, 1939, p. 285).

(6) *Normal Varieties* [*Ann. of Math.*, (2), **42**, 1941, p. 921].

(7) *Comptes rendus*, **220**, 1945, p. 234. Voir aussi *Thèse*, Paris, 1947.

deux d'origine algébrique, et d'examiner le rôle des singularités, j'ai obtenu le théorème suivant qui a précisément l'intérêt de ne comporter aucune hypothèse sur les singularités.

THÉORÈME. — *Toute variété arithmétiquement normale est de première espèce.*

La démonstration repose sur la théorie des idéaux dans les anneaux nœthériens intégralement fermés, sous la forme que lui a donnée E. Artin ([8]).

Appelons $\overline{F}$ l'image d'une forme $F \in R_n$ dans l'homomorphisme $R_n \to R_n/\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$. L'image de l'idéal $\mathfrak{p} + (\Phi)$ est l'idéal *principal* $(\overline{\Phi})$. V étant arithmétiquement normale, nous avons

$$(1) \qquad (\overline{\Phi}) \doteq \overline{\mathfrak{p}}_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \overline{\mathfrak{p}}_r^{\alpha_r} (\mathfrak{A}),$$

où $\overline{\mathfrak{p}}_1, \ldots, \overline{\mathfrak{p}}_r$ sont, dans $\mathfrak{o}$, des idéaux premiers distincts, non équivalents à $\mathfrak{o}$, tandis que $\mathfrak{A}$ désigne l'*équivalence d'Artin*, ou *quasi-égalité*, définie dans le demi-groupe $\mathfrak{J}$ des idéaux (entiers ou fractionnaires) par $\mathfrak{m} \equiv \mathfrak{n} (\mathfrak{A})$ si $\mathfrak{m}' = \mathfrak{n}'$ [c'est-à-dire $(\mathfrak{o}/\mathfrak{m}) = (\mathfrak{o}/\mathfrak{n})$]. Si l'on pose $\mathfrak{m}'' = (\mathfrak{m}')'$, $\mathfrak{m}''$ est l'idéal *maximum* de la classe à laquelle appartient $\mathfrak{m} \bmod \mathfrak{A}$. Comme $(\overline{\Phi}) = (\overline{\Phi})''$, l'idéal principal $(\overline{\Phi})$ est maximum dans sa classe : en caractérisant également l'idéal maximum de la classe contenant le produit $\overline{\mathfrak{p}}_1^{\alpha_1} \ldots \overline{\mathfrak{p}}_r^{\alpha_r}$, nous allons transformer (1) en une *égalité*.

Les idéaux premiers $\overline{\mathfrak{p}}$ de $\mathfrak{o}$, non équivalents à $\mathfrak{o}$, sont $\mathfrak{A}$-*maximaux* [c'est-à-dire $\overline{\mathfrak{p}} \subset \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{o}$ entraîne $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{o}$ $(\mathfrak{A})$] : ce sont donc les images, dans l'homomorphisme $R_n \to \mathfrak{o}$, des diviseurs premiers de $\mathfrak{p}$ de dimension $d-1$; les diviseurs premiers de dimension plus faible, en particulier l'idéal $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ ont pour images des idéaux équivalents à $\mathfrak{o}$. On a, pour $i \neq j$, $\overline{\mathfrak{p}}_i + \overline{\mathfrak{p}}_j \equiv \mathfrak{o} (\mathfrak{A})$, d'où résulte aisément

$$\overline{\mathfrak{p}}_1^{\alpha_1} \ldots \overline{\mathfrak{p}}_r^{\alpha_r} \equiv \overline{\mathfrak{p}}_1^{\alpha_1} \cap \ldots \cap \overline{\mathfrak{p}}_r^{\alpha_r}.$$

Or, $\overline{\mathfrak{p}}_i^{\alpha_i}$ est équivalent à l'idéal *primaire* $(\overline{\mathfrak{p}}_i^{\alpha_i})'' = \overline{\mathfrak{q}}_i$, qui appartient à $\overline{\mathfrak{p}}_i$ et est *maximum* dans sa classe $(\overline{\mathfrak{q}}_i = \overline{\mathfrak{p}}_i$ si $\alpha_i = 1)$. Comme on a, d'autre part, $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})'' = \mathfrak{a}'' \cap \mathfrak{b}''$, nous pouvons écrire

$$\overline{\mathfrak{p}}_1^{\alpha_1} \cap \ldots \cap \overline{\mathfrak{p}}_r^{\alpha_r} \equiv \overline{\mathfrak{q}}_1 \cap \ldots \cap \overline{\mathfrak{q}}_r,$$

où le second membre est l'idéal maximum de la classe à laquelle il appartient, d'où l'*égalité*

$$(2) \qquad (\overline{\Phi}) = \overline{\mathfrak{q}}_1 \cap \ldots \cap \overline{\mathfrak{q}}_r.$$

L'image inverse de $\overline{\mathfrak{q}}_i$ dans R_n (c'est-à-dire l'ensemble de *tous* les polynomes de R_n dont l'image appartient à $\overline{\mathfrak{q}}_i$) est un idéal *primaire* $\mathfrak{q}_i$ appartenant à $\mathfrak{p}_i$, donc de dimension $d-1$. L'image inverse du second membre de (2) est

([8]) B. L. VAN DER WAERDEN, *Modern Algebra*, II, p. 93-97, § 105.

l'intersection $\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_r$, tandis que celle du premier est précisément l'idéal $\mathfrak{p} + (\Phi)$: nous avons donc finalement la décomposition en idéaux primaires, dans R_n,

$$\mathfrak{p} + (\Phi) = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_r \quad \text{où} \quad \dim \mathfrak{q}_i = d - 1,$$

et nous avons établi le théorème suivant dont la proposition énoncée est un corollaire immédiat.

Théorème. — *Si $\mathfrak{p}$ est l'idéal associé à une variété de dimension d, irréductible et arithmétiquement normale, et si $\Phi \notin \mathfrak{p}$, l'idéal $\mathfrak{p} + (\Phi)$ est non mixte de dimension $d - 1$.*

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Sur l'équation de Pfaff équivalente aux deux équations de Codazzi.* Note [1] de M. **Louis Maneng.**

Si l'on désigne par ϖ_i, ϖ_{ij} les composantes relatives du déplacement infinitésimal du trièdre de Darboux, les formes ϖ_{ij} s'expriment en fonction des ϖ_i par des formules

$$(1) \qquad \varpi_{12} = h\varpi_1 + k\varpi_2, \qquad \varpi_{13} = a\varpi_1, \qquad \varpi_{23} = c\varpi_2,$$

où a et c sont les courbures principales, h et k les courbures géodésiques des lignes de courbure. Ces dernières grandeurs sont aussi les invariants simultanés des formes ϖ_1, ϖ_2, comme l'indiquent les formules

$$d\varpi_1 = h[\varpi_1\varpi_2], \qquad d\varpi_2 = k[\varpi_1\varpi_2].$$

On obtient les équations de Codazzi, sous la forme que leur donne M. E. Cartan [2], en différentiant extérieurement la seconde et la troisième des formules (1), et en appliquant les équations de structure [3]; on trouve ainsi

$$(2) \qquad \Pi_2 a = (a - c)h, \qquad \Pi_1 c = (a - c)k.$$

Les symboles $\Pi_1 f$, $\Pi_2 f$ désignent, pour une fonction de point quelconque f, les opérateurs linéaires, ou dérivées covariantes, associées aux formes ϖ_1, ϖ_2 suivant le schéma

$$df = \Pi_1 f\varpi_1 + \Pi_2 f\varpi_2.$$

On remarque que les formules de Codazzi [3] ne fournissent, pour chacun des invariants a et c, qu'une de leurs deux dérivées covariantes, ce qui ne permet pas de les remplacer immédiatement par une seule équation aux différentielles totales.

---

[1] Séance du 9 février 1948.

[2] *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, Paris, 1945, p. 139.

[3] *Ibid.*, p. 122.

Il en est autrement si l'on se sert des formes θ_1, θ_2 que j'ai introduites récemment ([3]) et qui sont liées aux formes ϖ_1, ϖ_2 par les relations

(3) $$\theta_1 = \sqrt{a-c}\,\varpi_1, \qquad \theta_2 = \sqrt{a-c}\,\varpi_2.$$

Si l'on y associe de nouvelles dérivées covariantes $T_1 f$, $T_2 f$ par

$$df = T_1 f \theta_1 + T_2 f \theta_2,$$

il est clair qu'entre ces dérivées et les précédentes $\Pi_1 f$, $\Pi_2 f$ existent les relations

(4) $$T_1 f = \frac{\Pi_1 f}{\sqrt{a-c}}, \qquad T_2 f = \frac{\Pi_2 f}{\sqrt{a-c}}.$$

J'appelle α et β les invariants définis par

$$d\theta_1 = \alpha[\theta_1 \theta_2], \qquad d\theta_2 = \beta[\theta_2 \theta_1];$$

leur valeur, en fonction des invariants h, k, a, c, s'obtient en différentiant ([4]) extérieurement

(5) $$\alpha = \frac{1}{a-c}\left(\frac{h\sqrt{a-c}}{2} + \frac{\Pi_2 c}{2\sqrt{a-c}}\right), \qquad \beta = \frac{-1}{a-c}\left(\frac{k\sqrt{a-c}}{2} + \frac{\Pi_1 a}{2\sqrt{a-c}}\right),$$

d'où l'on tire

(6) $$\Pi_1 a = -k(a-c) - 2(a-c)^{\frac{3}{2}}\beta, \qquad \Pi_2 c = -h(a-c) + 2(a-c)^{\frac{3}{2}}\alpha.$$

Combinant ces identités avec les équations (2) de Codazzi, il vient

$$\Pi_1(a+c) = -2(a-c)^{\frac{3}{2}}\beta, \qquad \Pi_2(a+c) = 2(a-c)^{\frac{3}{2}}\alpha,$$

ou, en faisant usage de (4),

(7) $$T_1(a+c) = -2(a-c)\beta, \qquad T_2(a+c) = 2(a-c)\alpha,$$

et l'on peut maintenant former l'équation aux différentielles totales

(8) $$d(a+c) = 2(a-c)(-\beta\theta_1 + \alpha\theta_2),$$

complètement équivalente aux deux équations de Codazzi.

La formule ainsi obtenue n'est pas nouvelle; elle équivaut à celle qu'a donnée M. V. Lalan ([5])

(9) $$dH = -2A(r\omega_1 + s\omega_2),$$

où $H = (a+c)/2$, $A = (a-c)/2$ et ω_1, ω_2 désignent les formes imaginaires qu'il appelle les formes minima. J'ai montré en effet, dans ma Note précédente, que

$$2\omega_1 = \theta_1 + i\theta_2, \qquad 2\omega_2 = \theta_1 - i\theta_2,$$
$$r = \beta + i\alpha, \qquad s = \beta - i\alpha,$$

([4]) *Comptes rendus*, 225, 1947, p. 1115-1116.
([5]) *Comptes rendus*, 224, 1947, p. 518-520.

et, en vertu de ces relations, (8) et (9) sont équivalentes. Il m'a paru intéressant néanmoins d'établir (8) sans sortir du domaine réel et sans faire emploi du repère biisotrope.

MÉCANIQUE PHYSIQUE. — *Sur le tracé dynamométrique des courbes d'élasticité dans l'essai mécanique des textiles.* Note de MM. **Albert Laborde** et **Maurice Leblanc**, présentée par M. Pierre Chevenard.

Nous pensons principalement aux fils de matières textiles ou de caoutchouc qui ne suivent pas la loi de Hooke et dont les caractères d'extensibilité peuvent varier, au cours de l'étirage, en fonction, non seulement des déformations de leur structure, mais aussi de la vitesse à laquelle une contrainte leur est imposée : lorsque la vitesse de déformation modifie *l'extensibilité renversable* [1] du fil, l'interprétation de l'enregistrement devient incertaine.

Nous caractériserons la valeur de l'extensibilité en tout point de la courbe $l = f(\pi)$ par le coefficient angulaire $dl/d\pi = \operatorname{tg}\varepsilon$ de sa tangente. Nous dénommerons $\operatorname{tg}\varepsilon$: *facteur d'extensibilité*, tandis que son inverse $d\pi/dl = 1/\operatorname{tg}\varepsilon = \operatorname{tg}\rho$ peut être appelé *facteur de résistance* et assimilé au module de Young en valeur instantanée.

On a souvent proposé, dans l'espoir d'apporter quelque rigueur à la méthode dynamométrique, de maintenir constante, au cours de l'épreuve, la vitesse d'allongement dl/dt. Il en résulte que la vitesse de charge $d\pi/dt$ demeure inversement proportionnelle à $\operatorname{tg}\varepsilon$ considérée comme caractérisant la propriété intrinsèque d'extensibilité du fil, à chaque instant, pendant les variations naturelles de celle-ci. En effet, en tout point du tracé, on peut écrire, entre les vitesses instantanées $d\pi/dt$ (en g/s), dl/dt (en mm/s), et le facteur d'extensibilité $dl/d\pi$ (en mm/g), l'identité

$$(a) \qquad \frac{dl}{dt} = \frac{dl}{d\pi}\frac{d\pi}{dt}, \qquad \text{soit} \qquad \frac{dl}{dt} = \operatorname{tg}\varepsilon\,\frac{d\pi}{dt}.$$

Quand $\operatorname{tg}\varepsilon$ varie entre 0 et ∞, la vitesse de charge $d\pi/dt$ varie entre ∞ et 0. Si l'échantillon passe par un état de plus grande résistance, par exemple, la charge peut augmenter avec une telle rapidité que l'élasticité du fil en soit modifiée, dans l'un ou l'autre sens, comme sous l'effet d'une secousse brusque d'extension. On risque alors de méconnaître ou de surestimer, d'après le tracé, une variation naturelle liée à la structure de la substance.

Un raisonnement semblable à celui-là s'applique à la méthode d'étirage à vitesse de charge constante.

---

[1] Suivant l'expression proposée par MM. Pierre Chevenard et Georges Champetier (*Mém. Soc. Ch. Fr. M.*, 1946, p. 464 à 474).

Vue sous cet aspect, la technique préconisée perd une part de la rigueur attendue.

Mais le danger des trop grandes vitesses de charge ou d'allongement peut être extrêmement réduit si celles-ci sont reliées linéairement par le mécanisme de l'appareil. Cette condition est remplie lorsque :

1° le montage d'enregistrement est solidaire de la presse liée elle-même à l'organe de résistance dynamométrique;

2° les déplacements m de cette presse sont proportionnels à l'effort de traction ($m = K\pi$);

3° le style enregistreur, solidaire de la presse de traction (mue à la vitesse v), note en tout point la longueur de l'échantillon. Alors, à chaque instant, la relation :

$$\frac{dl}{dt} = v - K\frac{d\pi}{dt} \tag{b}$$

est satisfaite entre les vitesses. Des expressions (a) et (b), l'on déduit directement les valeurs de dl/dt et $d\pi/dt$ en fonction de $\operatorname{tg}\varepsilon$, soit

$$\frac{dl}{dt} = \frac{v \operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}\varepsilon + K} \qquad \frac{d\pi}{dt} = \frac{v}{\operatorname{tg}\varepsilon + K} \tag{c}$$ [2].

Sur un dynamomètre établi d'après ce principe, la micromachine P. Chevenard ou le dynamomètre hydraulique L. Deffez et C. Chéneveau par exemple, lorsque $\operatorname{tg}\varepsilon$ varie entre o et ∞, dl/dt varie entre o et une limite v, $d\pi/dt$ entre une limite v/K et o. La vitesse v imprimée à la presse de traction peut être aussi petite qu'on le désire, v/K (en g/s) est d'autant plus petite que la sensibilité K du dynamomètre (en mm/g) est plus grande.

On opère ainsi dans les conditions les meilleures pour éviter que les fils ne soient soumis à des allongements ou à des efforts effectués, ne fût-ce que momentanément, avec une rapidité excessive.

Dans un essai réalisé sur un fil de caoutchouc pris en simple, puis double, puis triple brin, le facteur d'extensibilité $\operatorname{tg}\varepsilon$ a pu devenir 57 fois plus grand, tandis que la valeur de dl/dt variait seulement dans le rapport de 1 à 4 et celle de $d\pi/dt$ de 14 à 1.

---

(2) Ces expressions correspondent, par changement de variables, aux hyperboles équilatères

$$\left(\frac{dl}{dt} - v\right)(\operatorname{tg}\varepsilon + K) = -Kv \quad \text{et} \quad \frac{d\pi}{dt}(\operatorname{tg}\varepsilon + K) = v.$$

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Mouvement oscillatoire d'un liquide visqueux et pesant dans un tube en U; photographie du profil des déplacements; mise en évidence de la turbulence.* Note ([1]) de M. **Jacques Valensi** et Mlle **Claire Clarion**, présentée par M. Joseph Pérès.

Les résultats principaux de l'étude théorique de ces mouvements ont été exposés dans plusieurs Notes ([2]) parues ici-même, et l'on a également rendu compte de la seule comparaison qui fut possible jusqu'ici, avec les résultats expérimentaux antérieurs, relatifs à la valeur de l'amortissement.

Il restait donc pour établir directement la validité des conclusions théoriques : 1° à déterminer expérimentalement la répartition des élongations de la masse liquide dans une section droite (profil des déplacements); 2° à montrer expérimentalement l'existence de deux régimes d'écoulement, laminaire et turbulent.

1° Il est patent qu'en l'absence de forces capillaires, la surface libre de la colonne liquide épouserait à chaque instant la forme du profil des déplacements. Cette idée a été mise à profit par les auteurs de la façon suivante : on verse dans l'une des branches verticales d'un tube en U au-dessus de la colonne de longueur l d'un liquide donné dont on veut étudier le mouvement oscillatoire, une petite quantité d'un autre liquide faiblement miscible avec le premier, de densité légèrement inférieure, et tel qu'à la surface de séparation ainsi créée, la tension capillaire interfaciale soit négligeable. Les différences des indices de réfraction des deux phases liquides et les différences de coloration, permettent alors la photographie de cette surface, qui est une surface fluide, au cours de son mouvement. On peut admettre, vu la faible masse du liquide additionnel, que cette surface épouse approximativement à chaque instant la forme du profil des déplacements du liquide principal.

Une réserve doit cependant être faite, car si la valeur de la tension interfaciale peut être rendue très faible, par un choix convenable des deux phases liquides, les coefficients de viscosité de ces deux phases sont en général différents.

Après la première oscillation, il se produit en général une émulsion des deux phases, mais cette émulsion qui se présente sous la forme de fines gouttelettes est très favorable à l'observation du mouvement.

De nombreux films au cinéma ultra-rapide conjugué avec l'éclair du Stroborama Seguin ont été pris ainsi, du mouvement oscillatoire de différents liquides, pour diverses valeurs du paramètre de similitude (diamètre intérieur du tube $10^{mm},5$). Quelques photographies tirées de ces films sont reproduites figures 1 à 4.

([1]) Séance du 9 février 1948.

([2]) *Comptes rendus*, **224**, 1947, p. 446, 532, 893, 1695.

2° La turbulence, lorsque $R^2(\omega_p/\nu)$ est grand, est mise en évidence par le déplacement radial des gouttelettes de la phase auxiliaire dans le liquide principal. Mais le fait le plus important est le suivant : en régime turbulent



Fig. 1. — Surface de séparation $R^2(\omega_p/\nu) = 8$; écoulement laminaire, 1re oscillation.



Fig. 2. — Surface de séparation $R^2(\omega_p/\nu) = 300$; écoulement turbulent, 2e oscillation. Le profil des déplacements présente des points d'inflexion.

à la fin de la première oscillation, aussitôt que la vitesse s'annule, des décollements apparaissent sur la paroi, et des stries de réfraction sont visibles dans la colonne du liquide principal; décollements et stries s'accentuent avec

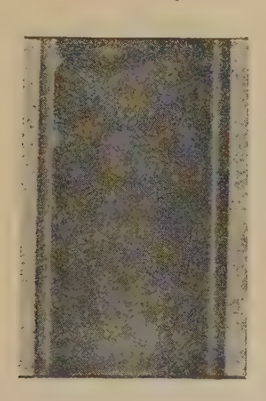


Fig. 3. — Décollement et stries dans la colonne de liquide principal, $R^2(\omega_p/\nu) = 300$, lorsque après la 1re oscillation le mouvement de retour s'amorce.

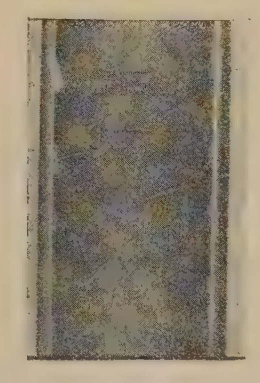


Fig. 4. — Décollement et stries dans la colonne de liquide principal, $R^2(\omega_p/\nu) = 300$, après la 1re oscillation, le mouvement de retour s'amplifiant.

l'augmentation de la vitesse (*fig.* 3 et 4). Ces derniers phénomènes sont totalement absents lorsque $R^2(\omega_p/\nu)$ est inférieur à 16 et les gouttelettes de la phase auxiliaire ont dans ce cas des déplacements rigoureusement longitudinaux, quelle que soit la grandeur de l'amplitude initiale; le mouvement est donc laminaire.

La turbulence apparaît donc ne pas être liée à la grandeur de la vitesse,

comme on l'a cru jusqu'ici, mais est liée à la valeur de la fréquence de ses oscillations. En outre on voit que la turbulence commence à apparaître lorsque le mouvement de la colonne change de sens.

Ainsi les conclusions de l'étude théorique se trouvent complètement confirmées par l'expérience; en outre une nouvelle méthode expérimentale est établie pour l'étude du mouvement des fluides qui est applicable aussi bien aux mouvements variés qu'aux mouvements permanents.

HYDRODYNAMIQUE. — *Sur la condition d'adhérence à la paroi en Mécanique des fluides parfaits incompressibles.* Note [1] de M. **Roger Brard**, présentée par M. Émile-Georges Barrillon.

La Mécanique des fluides parfaits incompressibles permet d'expliquer l'effet sustentateur d'une aile pourvu qu'on admette l'existence d'une circulation non nulle autour de l'aile. D'autre part, la théorie de la couche limite de Prandtl explique pourquoi la viscosité du fluide entraîne l'existence d'un domaine tourbillonnaire au voisinage immédiat de l'aile. M. M. Roy a eu alors l'idée que la circulation autour de l'aile est due aux tourbillons de la couche limite, et, ainsi, qu'il existe un schéma permettant de passer de façon continue de la Mécanique des fluides parfaits à celle des fluides de viscosité faible, mais non nulle.

La présente Note a pour objet d'établir dans le cas des problèmes plans la validité de l'idée de M. Roy [2], et de préciser la répartition des tourbillons dans la couche limite.

Nous distinguerons la frontière intérieure C_i et la frontière extérieure C_e de la couche limite. C_i coïncide avec le contour C de l'aile; C_e en est infiniment voisin si la viscosité est évanescente. Nous envisageons un potentiel complexe

$$f(z) = (U - iV)z + \frac{1}{2\pi}\int_C [k(M') - i\gamma(M')] \log\{z - z(M')\}\, ds(M').$$

Dans cette expression, M' est un point de C, ds l'élément d'arc de C, $k\,ds$ le débit des sources fictives réparties sur l'arc ds, et $\gamma\,ds$ la circulation des tourbillons attachés à cet arc. Les conditions imposées sont que la vitesse résultante :

1° ait sur C_e une composante normale nulle;

2° ait sur C_i une composante tangentielle nulle;

3° ait sur C_i une composante normale nulle;

4° soit finie à la pointe arrière B de l'aile.

Le calcul est très simple quand on recourt à une transformation conforme

(1) Séance du 9 février 1948.

(2) *L'Aérodynamique des ailes sustentatrices et des hélices*, 1928, p. 37.

$Z = G(z)$ permettant de représenter le domaine du plan z extérieur à C_i sur le domaine d'un plan (Z) extérieur à un cercle de rayon 1, les deux points à l'infini se correspondant mutuellement. En deux points homologues, $k\,ds$ et $\gamma\,ds$ ont, en effet, mêmes valeurs en vertu des propriétés conservatrices des transformations conformes. En posant $\Omega = \arg Z$, on trouve, à cause des 3 premières conditions :

$$k = -2U\cos\Omega - 2V\sin\Omega,$$
$$\gamma = \text{const.} = \gamma_0.$$

γ_0 est déterminée par la condition 4°.

La solution obtenue coïncide, dans le plan (Z), à l'extérieur du cercle, avec la solution de Kutta-Joukowski, car le tourbillon réparti de densité γ_0 équivaut, dans le plan Z, pour l'extérieur du cercle, à un tourbillon unique concentré au centre du cercle. La coïncidence se conserve évidemment dans le plan (z).

En d'autres termes, on peut, dans la Mécanique des fluides parfaits, satisfaire la condition d'adhérence à la paroi, à condition de prévoir sur l'aile une répartition de tourbillons dont l'intensité est inversement proportionnelle au rapport d'homothétie locale de la transformation $z \to Z$. En moyenne, sous incidence normale, cette intensité est en valeur absolue plus forte sur l'extrados que sur l'intrados.

En outre, on peut imaginer C_i comme limitant extérieurement une masse fluide au repos (aile fluide), car la solution comporte sur C_i une vitesse nulle et par suite une pression constante.

MÉCANIQUE STATISTIQUE QUANTIQUE. — *Fonctions aléatoires du second ordre et fonctions aléatoires simultanément enregistrables, en théorie quantique. Leurs représentations par des espaces de Hilbert.* Note (1) de MM. **Edmond Arnous** et **Daniel Massignon**.

Dans une Note récente (2) nous avons montré qu'une grandeur observable A est fonction aléatoire du temps, si les opérateurs $A_t = U_t^* A U_t$ commutent deux à deux. Nous nous proposons ici, dans le domaine quantique, de préciser dans quelles circonstances une fonction aléatoire est du second ordre (3), de définir ce qu'il faut entendre par fonctions aléatoires simultanément enregistrables (4), et de montrer comment on peut représenter ces fonctions aléatoires par des espaces de Hilbert.

---

(1) Séance du 9 février 1948.

(2) Séance du 19 janvier 1948.

(3) Seules les fonctions aléatoires du second ordre pourront être représentées par des espaces de Hilbert, et, par suite, ce seront les seules pour lesquelles on pourra définir la continuité et la dérivabilité en moyenne quadratique.

(4) Ce sont celles qui interviennent dans la théorie quantique des *grandeurs macroscopiques*. Cependant J. von Neumann (*Z. f. Phys.*, 57, 1929, p. 30-70) a édifié cette

1. On sait qu'une fonction aléatoire du temps est du second ordre si les deux premiers moments de sa loi de probabilité sont finis à chaque instant. Pour qu'une fonction aléatoire A soit *du second ordre*, il faut donc et il suffit que

$$(A_t\psi, A_t\psi) = (U_t^* AU_t\psi, U_t^* AU_t\psi) = (AU_t\psi, AU_t\psi)$$

soit fini, c'est-à-dire que $\psi_t = U_t\psi$ *évolue en restant dans le domaine d'existence de l'opérateur* A; cette condition est essentielle si nous voulons construire une métrique sur l'espace vectoriel défini par les A_t (5). Lorsqu'elle est satisfaite, en effet, nous pouvons prendre comme produit scalaire de A_t par $A_{t'}$,

$$(A_t, A_{t'}) = (A_t\psi, A_{t'}\psi), \tag{1}$$

En complétant alors cet espace par rapport à la métrique ainsi définie, on obtient un espace $\mathcal{R}(A)$ vectoriel, métrique et complet (séparable ou non), c'est-à-dire un espace de Hilbert. Nous l'appellerons : espace attaché à la fonction aléatoire A. Il permettra d'étudier les propriétés de convergence de A.

2. Nous avons défini (2) une fonction aléatoire A comme une grandeur enregistrable et nous avons vu que cela revenait à exiger que les A_t permutent deux à deux. Nous définirons de même *un ensemble de fonctions aléatoires* comme des grandeurs A, B, C, ... simultanément enregistrables, en exigeant que *les opérateurs* A_t, $B_{t'}$, $C_{t''}$, ... *permutent deux à deux*. Lorsque ces fonctions aléatoires sont du second ordre, on peut, comme tout à l'heure, leur attacher un espace de Hilbert $\mathcal{R}(A, B, C, \ldots)$ dont $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{R}(B)$, $\mathcal{R}(C)$, ... sont des sous-espaces.

3. Nous ferons jouer dans la suite un rôle essentiel aux transformations S_τ définies sur les A_t par

$$A_t \to A_{t+\tau} = S_\tau A_t \tag{2}$$

et de façon analogue sur les combinaisons linéaires des A_t (6).

Elles sont donc linéaires et forment un groupe

$$S_{\tau+\tau'} = S_\tau S_{\tau'}, \qquad S_0 = 1, \qquad S_\tau^{-1} = S_{-\tau}.$$

Définition analogue sur $\mathcal{R}(A, B, C, \ldots)$.

---

théorie sans exiger que les grandeurs soient des fonctions aléatoires. Nous estimons au contraire que cette condition est essentielle. Rappelons que l'enregistrement d'une fonction aléatoire s'opère par pointés successifs.

(5) L'espace défini par les A_t comprend par définition toutes les combinaisons linéaires finies des A_t à coefficients réels. Celles-ci sont des opérateurs self-adjoints, puisque les A_t permutent, et représentent des *variables aléatoires*, étant donné qu'à chacune d'elles est attachée une loi de probabilité. Quant au produit scalaire $(A_t, A_{t'})$, c'est le *coefficient de corrélation* des variables aléatoires A_t et $A_{t'}$, supposées normées.

(6) Si les U_t forment un groupe $U_{t+\tau} = U_t U_\tau$ et $S_\tau A_t = U_\tau^* A_t U_\tau$, quel que soit τ.

On voit que les *intégrales premières* du mouvement sont les fonctions aléatoires pour lesquelles $S_\tau = 1$ quel que soit τ. C'est le cas, par exemple, des projecteurs correspondant aux *couches énergétiques* ([7]) d'un système isolé. Les projecteurs correspondant aux *cellules d'extension en phase* doivent aussi être considérés comme des fonctions aléatoires; l'*hypothèse ergodique* affirme tout simplement que, pour ces derniers, on ne peut avoir $S_\tau = 1$ quel que soit τ.

4. Lorsque les lois de probabilité attachées aux fonctions aléatoires ont des moments de tous ordres (fonctions aléatoires d'ordre infini), il peut être intéressant, au lieu des espaces vectoriels $\mathcal{R}(A)$ ou $\mathcal{R}(A, B, C, \ldots)$ précédents, de construire les *anneaux* d'opérateurs $\mathcal{A}(A)$ ou $\mathcal{A}(A, B, C, \ldots)$. De tels anneaux sont évidemment commutatifs; ils contiennent tous les polynomes en A_t, $B_{t'}$, $C_{t''}$, ... à coefficients réels et leurs limites. On pose

$$S_\tau(A_t B_{t'}) = A_{t+\tau} B_{t'+\tau}. \tag{3}$$

5. Enfin, si l'on veut donner à la théorie précédente toute sa généralité, on peut aussi introduire des fonctions aléatoires complexes. Les opérateurs self-adjoints A_t et leurs combinaisons linéaires à coefficients réels sont alors remplacés par des opérateurs normaux ([8]) et leurs combinaisons linéaires à coefficients complexes.

Remarque. — On notera la parenté du formalisme précédent et de celui de Koopman ([9]) en Mécanique classique.

ASTRONOMIE. — *Sur les distances des cratères au centre de la Lune et forme du globe lunaire.* Note ([1]) de M. **Théophile Weimer**, présentée par M. Ernest Esclangon.

1. Considérons deux clichés de la Lune correspondant à des valeurs différentes de la libration. En désignant par R_g la distance cratère-centre Lune, par Δ la distance observateur-centre Lune, par σ l'angle sous lequel l'observateur voit R_g, et par a l'angle sous lequel un observateur sélénocentrique verrait la distance observateur-cratère, les triangles observateur-centre Lune-cratère donnent $R_g = \Delta_1 \sin\sigma_1 : \sin(a_1 + \sigma_1) = \Delta_2 \sin\sigma_2 : \sin(a_2 + \sigma_2)$. (Les indices 1 et 2 correspondent respectivement aux clichés 1 et 2.)

2. Les quantités a_1 et a_2, sont des fonctions des angles de position des

---

([7]) Cf. von Neumann, *loc. cit.*

([8]) Un opérateur normal est de la forme $A + iB$, où A et B sont self-adjoints et permutent. Il est ainsi possible d'étudier de façon analogue aux grandeurs réelles, les grandeurs complexes que l'on rencontre, par exemple, dans la théorie des champs électromagnétiques macroscopique (de Maxwell).

([9]) *Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.*, 17, 1931, p. 315-318.

([1]) Séance du 2 février 1948.

cratères et des valeurs des librations en longitude et en latitude relatives aux deux clichés.

3. Ces éléments se calculent à partir des positions des 5 cratères fondamentaux : Mösting A, W. H. Pickering, Kepler A, Egede A, Tycho (pic) dont les coordonnées sélénographiques ont été données par Hayn [2]. Les quatre clichés utilisés : 10 déc. 1894, 2 sept. 1898, 14 nov. 1899, 15 avril 1905, permettent de constituer 6 couples différents. Les deux couples 1894-1905, 1898-1899, n'ayant pas des librations assez différentes pour donner R_g avec précision, n'ont pas été réduits. Ajoutons que les quatre clichés mesurés sont des contre-types munis d'un réseau déjà utilisés par Puiseux pour son étude [3].

4. En admettant que la forme générale de la Lune est celle d'un ellipsoïde de révolution, allongé vers la Terre, de demi-grand axe R_E, son *allongement* est défini par $p = (R_E - R_{☾}) : R_{☾}$. D'où l'on déduit $p \cos^2 K = (R_g - R_{☾}) : R_{☾}$. K, angle sélénocentrique formé par le grand axe de l'ellipsoïde avec le rayon vecteur du cratère G. Dans nos mesures, K était toujours inférieur à 60°.

5. Les quantités $(R_g - R_{☾}) : R_{☾}$ résultent de la moyenne de 4 valeurs. Elles ont été calculées pour 72 cratères répartis sur toute la partie visible de la Lune. En calculant les p relatifs aux 4 quadrants, on trouve : $p_{SO} = +0,0031$, $p_{NO} = +0,0033$, $p_{NE} = +0,0036$, $p_{SE} = +0,0020$.

L'ensemble des cratères donne : $p = +0,00294 \pm 0,00115$ ($5^{km},5 \pm 2^{km}$). En pondérant les équations selon la précision des R_g,

$$p = +0,00335 \pm 0,00027 \; (5^{km},8 \pm 0^{km},5.$$

Enfin les cratères les plus rapprochés du centre donnent : $p_{centre} = +0,0022$, les cratères restants : $p_{bord} = +0,0032$.

6. Ces différents chiffres concordent d'une façon suffisante pour qu'on puisse leur attribuer quelque crédit. La moyenne des 72 $(R_g - R_{☾}) : R_{☾}$ est $+0,00221$ avec un écart moyen de $\pm 0,00171$. On voit par là que le rayon moyen des cratères est supérieur au rayon de la Lune tel qu'il résulte des mesures faites sur le contour. On pourrait attribuer ceci à un effet systématique provenant du fait que nous mesurons sur le disque des points qui sont au-dessus du niveau moyen. Cette éventualité semble devoir être écarté : 1° il ne semble pas que l'on pointe la crête des parois des cratères, mais un endroit situé légèrement en dessous ; 2° il y a des cratères aux parois peu élevées ; 3° une bonne partie des cratères se trouve dans les *mers*, régions que l'on peut considérer plutôt comme des dépressions ; 4° le rayon de la Lune déterminé uniquement d'après les mesures faites sur le contour est déjà un peu fort ; il est vraisemblablement supérieur au rayon moyen tel qu'il résulterait de mesures topographiques directes. En effet, les fortes dépressions du contour sont inaccessibles à nos

(2) *Selen. Koord. III, Abh. König. Sächs. Gesellschaft der Wissen.*, Leipzig.
(3) *Ann. Obs. Paris*, 32, 1925, p. 1 et suiv.

mesures car elles sont, en général, masquées par des régions plus élevées qui se profilent sur elles.

7. Les distances étant connues à un centième de millimètre près, les angles à un centième de degré, l'erreur commise sur $(R_g - R_{☾}) : R_{☾}$ sera au plus de 1 à 2 millièmes. C'est bien ce que semblent montrer nos mesures. Malheureusement, l'incertitude sur les valeurs de la libration entraîne des erreurs bien plus considérables. Ainsi, si l'on réduisait avec les valeurs de la libration optique seule, on obtiendrait des $(R_g - R)_{☾} : R_{☾}$ en écart de quelques centièmes sur ceux que nous avons calculés.

8. *Remarque.* — La valeur de p donnée par nos mesures est environ 5 fois plus grande que celle que l'on déduirait, dans l'hypothèse d'un ellipsoïde homogène, des valeurs des moments d'inertie données par Tisserand [4]. Cette contradiction peut s'expliquer de deux manières : 1° les coefficients qui interviennent dans la libration ne sont pas connus avec assez de sûreté pour que les valeurs de Tisserand puissent être regardées comme définitives ; 2° la présente étude donne la forme géométrique de la Lune, mais elle ne permet de rien préjuger quant à la répartition des masses et à la grandeur des moments d'inertie. Les valeurs de Tisserand et les nôtres peuvent très bien se concilier si l'on admet que les masses ne sont pas distribuées d'une façon homogène à l'intérieur de l'ellipsoïde lunaire.

ASTROPHYSIQUE. — *Sur une méthode d'intégration des équations d'équilibre des atmosphères stellaires.* Note de M. **Jean-Claude Pecker**, présentée par M. Bernard Lyot.

1. Dans quatre Notes récentes [1], V. Kourganoff a proposé une méthode de résolution des systèmes d'équations régissant l'équilibre des atmosphères stellaires. Ceci dans le cas très général où le coefficient d'absorption de la matière stellaire est une fonction quelconque de la fréquence. Cette résolution se fait à partir des seules données expérimentales de la gravité g, de la température effective T_e (ou du flux sortant $F = aT_e^4$) et de la composition chimique.

Toutefois, ces équations ne tiennent pas compte de la diffusion Thomson par les électrons libres, qui joue un rôle important dans les étoiles chaudes comme les étoiles B. Or il est possible sans compliquer beaucoup la méthode, de tenir compte de ce phénomène.

2. L'équation de transfert devient en effet

$$\cos\theta \frac{dI_\nu}{\rho\, dx} = (k_\nu + \sigma_\nu) I_\nu - k_\nu B_\nu - \sigma_\nu \bar{I}_\nu \tag{1}$$

(avec les notations classiques).

---

[4] *Mécanique céleste*, 2, p. 444 et suiv.

[1] *Comptes rendus*, 225, 1947, p. 430, 451, 491 et 1124.

On peut l'écrire sous la forme

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - \lambda_\nu B_\nu - (1 - \lambda_\nu) J_\nu, \tag{2}$$

en posant

$$\mu = \cos\theta, \tag{3}$$

$$\lambda_\nu = \frac{k_\nu}{k_\nu + \sigma_\nu}, \tag{4}$$

$$d\tau_\nu = (k_\nu + \sigma_\nu)\rho\, dx = f(T, \rho, \nu)\, dx. \tag{5}$$

L'équation (2), linéaire, peut se mettre sous la forme

$$\text{(6)}\quad \text{Si } \mu > 0 \qquad I_\nu(\tau_\nu) = \int_{\tau_\nu}^{\infty} \frac{1}{\mu}[(1-\lambda_\nu)\bar{I}_\nu + \lambda_\nu B_\nu]\, e^{-\frac{t-\tau_\nu}{\mu}}\, dt.$$

$$\text{(7)}\quad \text{si } \mu < 0 \qquad I_\nu(\tau_\nu) = \int_{0}^{\tau_\nu} - \frac{1}{\mu}[(1-\lambda_\nu)\bar{I}_\nu + \lambda_\nu B_\nu]\, e^{-\left(\frac{t-\tau_\nu}{\mu}\right)}\, dt.$$

On peut en déduire les relations

$$\text{(8)}\quad 2\bar{I}_\nu = \int_{-1}^{+1} I_\nu\, d\mu = \int_{\tau_\nu}^{\infty} [(1-\lambda_\nu)\bar{I}_\nu + \lambda_\nu B_\nu]\, K_1(t-\tau_\nu)\, dt + \int_{0}^{\tau_\nu} [(1-\lambda_\nu)\bar{I}_\nu + \lambda_\nu B_\nu]\, K_1(\tau_\nu - t)\, dt,$$

$$\text{(9)}\quad \frac{1}{2}\mathcal{F}_\nu = \int_{-1}^{+1} I_\nu \mu\, d\mu = \int_{\tau_\nu}^{\infty} [(1-\lambda_\nu)\bar{I}_\nu + \lambda_\nu B_\nu]\, K_2(t-\tau_\nu)\, dt + \int_{0}^{\tau_\nu} [(1-\lambda_\nu)\bar{I}_\nu + \lambda_\nu B_\nu]\, K_2(t-\tau_\nu)\, dt.$$

3. La méthode de Kourganoff pourra donc s'appliquer au cas présent de la façon suivante.

On partira d'une forme analytique déterminée, à coefficients arbitraires, pour la fonction

$$J_\nu = (1-\lambda_\nu)\bar{I}_\nu + \lambda_\nu B_\nu = \sum_p a_{\nu,p}\varphi_p(\tau_\nu). \tag{10}$$

L'équation (8) et l'équation (9) pourront alors être transformées et mises sous la forme

$$\bar{I}_\nu = \sum_p a_{\nu,p}\Lambda_{\nu,p}(\tau_\nu), \tag{11}$$

$$\mathcal{F}_\nu = \sum_p a_{\nu,p}\Phi_{\nu,p}(\tau_\nu). \tag{12}$$

Les coefficients a_ν seront déterminés par la condition de conservation approchée du flux, c'est-à-dire, en rendant l'intégrale

$$\mathcal{F}(x) = \int_0^\infty \mathcal{F}_\nu(\tau_\nu)\, d\nu \tag{13}$$

aussi constante que possible. Cette intégrale pourra se calculer [en utilisant la relation (5), l'équation de l'équilibre hydrostatique, la théorie de l'ionisation et la loi des gaz parfaits] au moyen de la loi $T_q(x)$ correspondant à ce stade de l'itération et par une méthode d'intégration de Gauss : En choisissant convenablement certaines fréquences en nombre fini, on peut écrire

$$(14) \qquad \mathcal{F}(x) = \int_0^\infty \mathcal{F}_\nu(\tau_\nu)\, d\nu = \sum_i M_i \mathcal{F}_{\nu_i}(\tau_{\nu_i}).$$

On rendra alors minimum l'intégrale

$$(15) \qquad \sigma = \int_0^\infty \left(\frac{\mathcal{F}(x)}{F} - 1\right)^2 dx$$

(où F est la valeur constante expérimentale du flux), et l'on obtiendra les coefficients a_{ν_i}, donc $\bar{I}_{\nu_i}$ et, par la relation (10), B_{ν_i}.

4. La loi $T_{q+1}(x)$ qui servira de base au stade suivant de l'itération sera déterminée par la relation

$$(16) \qquad \int_0^\infty B_\nu(\tau_\nu)\, d\nu = aT^4_{q+1},$$

qui s'écrira aussi, en remplaçant l'intégration par une sommation

$$(17) \qquad \sum_i N_i B_{\nu_i}(\tau_{\nu_i}) = aT^4_{q+1}.$$

Il sera donc possible d'achever la résolution du système.

GÉODÉSIE. — *Liaisons gravimétriques à longue distance.* Note de MM. **Jean Martin** et **Robert Bollo**, présentée par M. Pierre Lejay.

Le bureau des Recherches géologiques et géophysiques et les Expéditions Polaires Françaises (Missions Paul-Émile Victor) ont entrepris en commun des mesures gravimétriques ayant pour objet d'étudier la possibilité d'utiliser des appareils de prospection pour les liaisons gravimétriques à longue distance.

En novembre 1947 nous avons effectué la liaison Paris-Lyon-Genève-Chamonix, avec retour par le même itinéraire et les mêmes stations. En janvier 1948, nous avons joint Paris à Clermont-Ferrand, Toulouse, le Pic du Midi, avec un itinéraire de retour différent de celui de l'aller.

La première liaison a été réalisée avec un gravimètre « *North American* »; nous lui avons adjoint deux autres appareils du même type pour la deuxième. Ces appareils comportent un fléau suspendu par un système de ressorts, dans des conditions telles que l'astatisme soit à très peu près réalisé; une double enceinte thermostatique assure la constance de la température. La précision

Stations.	Longitude E. G.	Latitude.	Altitude.	g. observé.
	° ′	° ′	m	mgals
Paris-Observatoire	2 20,2	48 50,6	56	980 943,00
Lieusaint	2 34,4	48 37,0	90	899,7
Fontainebleau (Château)	2 41,9	48 24,1	75	899,2
Montereau	2 57,6	48 23,5	55	900,1
Pont-sur-Yonne	3 12,4	48 17,4	62	893,1
Sens (Cathédrale)	3 17,0	48 11,9	69	885,1
Arces	3 35,9	48 5,6	248	840,3
Saint-Florentin	3 43,8	48 0,1	126	860,0
Tonnerre	3 58,3	47 51,4	178	827,6
Nuits-sur-Armançon	4 12,9	47 43,8	190	810,0
Les Laumes	4 27,2	47 32,8	237	785,2
Uncey-le-Franc	4 34,8	47 20,7	355	742,0
Dijon (Gare)	5 01,8	47 19,5	246	757,7
Citeaux	5 06,0	47 07,4	194	750,3
Seurre	5 09,1	46 59,7	181	747,5
Mervans	5 10,9	46 48,0	196	731,8
Louhans	5 13,1	46 37,9	181	712,3
Saint-Amour	5 20,2	46 26,0	222	689,7
Bourg-en-Bresse (Eglise de Brou)	5 14,2	46 11,8	235	645,8
Villars-les-Dombes	5 01,7	46 0,3	280	631,9
Crépieux	4 52,9	45 48,2	229	638,4
Francheville-le-Haut (N.-D.-du-Chatelard)	4 45,5	45 44,0	298	619,9
Saint-Genis-Laval (Obs. de Lyon)	4 47,1	45 41,7	296	616,9
Chesnes	5 07,2	45 39,2	225	606,4
Bourgoin (La Ladrière)	5 14,5	45 35,7	224	588,8
La Tour-du-Pin	5 27,0	45 33,6	339	540,1
Chambéry	5 55,2	45 34,3	270	526,7
Albens	5 56,9	45 47,2	353	528,0
Annecy	6 08,1	45 54,1	449	518,7
La Roche-sur-Foron	6 17,4	46 04,5	620	503,6
Cluses	6 35,0	46 03,7	484	506,7

Stations.	Longitude E. G.	Latitude.	Altitude.	g. observé.
	°	°	m	mgals
Sallanches	6 38,0	45 56,1	560	461,3
Le Fayet	6 42,7	45 54,6	588	439,6
Servoz	6 45,4	45 55,8	804	398,3
Bellevue	6 47,0	45 52,4	1808	194,3
Chamonix	6 52,3	45 55,6	1036	332,9
Genève (Obs.)	6 10,0	46 12,0	401	578,8
Montargis	2 43,4	47 59,5	84	863,0
Briare	2 44,4	47 38,3	144	826,0
La Charité-sur-Loire	3 0,9	47 10,6	161	775,9
Moulins	3 19,9	46 34,0	222	702,7
Gannat	3 11,8	46 06,1	343	618,4
Clermont-Ferrand	3 05,0	45 46,2	386	578,5
Issoire	3 14,8	45 32,6	391	557,6
Massiac	3 12,0	45 15,4	540	504,7
Saint-Flour	3 05,8	45 02,0	882	403,9
Aurillac	2 27,0	44 55,9	619	459,3
Rodez	2 34,4	44 21,1	632	407,2
Carmaux	2 30,8	44 03,0	245	482,6
Albi	2 08,6	43 55,7	174	502,7
Toulouse (Obs.)	1 27,8	43 36,7	196	440,5
Saint-Gaudens	0 43,4	43 06,6	404	341,1
Bagnères-de-Bigorre	0 08,6	43 03,6	559	285,7
Pic-du-Midi (Obs.)	0 08,3	42 56,3	2850	979 738,5
Tarbes	0 04,0	43 14,1	306	980 357,2
Auch	0 35,2	43 38,9	166	449,7
Montauban	1 19,6	44 0,9	85	504,4
Cahors	1 26,6	44 26,9	124	548,3
Brives	1 31,8	45 09,6	113	606,7
Limoges	1 15,9	45 50,0	258	628,9
Bellac	0 57,7	46 07,5	227	668,5
Lussac-les-Châteaux	0 43,5	46 24,3	109	722,9
Châteauroux	1 41,1	46 48,8	144	752,0
Blois	1 19,9	47 35,7	94	820,4
Chartres	1 29,5	48 26,3	158	885,7

de lecture est de $0^{mgal},01$, mais l'amplitude de l'échelle n'est que de 100 milligals. Des remises périodiques au zéro ont donc été nécessaires.

Au cours de la première liaison, les divers segments mesurés à quinze jours d'intervalle n'ont pas différé de plus de $0^{mgal},1$ exceptionnellement et le plus souvent de quelques centièmes. La différence Paris-Chamonix a été trouvée de $608^{mgal},27$ à l'aller et de $608^{mgal},90$ au retour. Cette différence a été attribuée à une dérive dont les résultats ont été corrigés.

La liaison Paris-Toulouse a mis en évidence une légère discordance dans l'étalonnage des gravimètres qui se traduit par une différence maximum de $2^{mgal},4$ pour la valeur à Toulouse. La différence Paris-Toulouse a été mesurée à l'aller et au retour avec un écart maximnm de $0^{mgal},19$.

Nous avons adopté la moyenne des valeurs données par les trois appareils, et pour rendre les résultats homogènes nous avons réduit les résultats de la première liaison à ce qu'ils auraient été dans ces mêmes conditions. Cette opération se traduit par un écart maximum de $1^{mgal},5$ à Chamonix.

L'étalonnage indiqué par le constructeur résulte de mesures effectuées avec chaque appareil en un certain nombre de bases Nord-américaines, où les valeurs de la gravité ont été déterminées au pendule, et qui sont utilisées par tous les constructeurs américains.

Remarques sur la Note précédente par M. **Pierre Lejay.**

Les résultats des campagnes de MM. Martin et Bollo apportent, pour l'établissement de la carte gravimétrique de France, de nouveaux éléments d'une grande importance. Au cours de ces campagnes, en effet, toutes les bases secondaires du réseau français ont été reliées entre elles (à l'exception de Besançon qui a été rattaché autrefois à Lyon au moyen d'un gravimètre de Thyssen).

Ces liaisons permettent d'assurer au moins *l'homogénéité* du réseau. Il est vrai que, du fait de l'étalonnage des gravimètres utilisés dans ces campagnes sur une base américaine, les différences de pesanteur mesurées en France sont rapportées à cette base. On ne pourra faire en France aucun contrôle de l'unité dans laquelle les différences sont exprimées, tant qu'on n'y disposera pas d'un appareil à pendules libres de haute précision. Il semble qu'en attendant cette éventualité, il y ait lieu de reprendre toutes les valeurs publiées jusqu'à ce jour et de les exprimer dans le nouveau système. On remarquera que cette révision ne portera que sur quelques milligals (5 milligals pour la différence Paris-Toulouse), sauf pour les stations très élevées du Sud de la France. L'allure des courbes isanomales portées sur les cartes publiées antérieurement ne sera pas modifiée de façon sensible.

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Corrélation entre la complémentarité de Louis de Broglie et la matrice caractéristique de Heisenberg.* Note [1] de MM. **Jean-Louis Destouches** et **Michel Cazin**.

1. La conception de la *matrice caractérisque* S due à M. Heisenberg semble un peu trop radicale, car on admet qu'on peut encore considérer des systèmes de corpuscules entre lesquels s'exercent des interactions indépendamment du reste de l'univers, c'est-à-dire qu'on peut décomposer l'univers en partie spécifiée (le système) et en partie non spécifiée. En outre, on admet que l'on peut effectuer un certain nombre de types de mesures, et que la prévision de résultats de mesures ultérieures à partir de résultats de mesures initiales constitue le but primordial d'une théorie; aussi peut-on faire intervenir le formalisme de la théorie générale des prévisions [2], et en particulier les éléments initiaux et les éléments de prévision. Lorsque l'on se trouve dans les conditions où la mécanique ondulatoire est adéquate, la nouvelle théorie devra s'y ramener. Ce cas limite a pour conséquence que la nouvelle théorie doit être subjectiviste, puisqu'elle se trouve l'être dans un cas limite (mécanique ondulatoire). Par suite le principe de décomposition spectrale sera valable dans cette théorie [3], et nous aurons ainsi une théorie de type nécessairement ondulatoire.

2. Les éléments initiaux sont transformés à l'instant t en éléments de prévision au moyen d'un opérateur d'évolution $\mathcal{U}(t, t_0)$. Si les éléments de prévision sont dérivables par rapport au temps, l'opérateur d'évolution $\mathcal{U}$, qui possède un inverse, est également dérivable, et l'on peut définir un opérateur $\mathbf{H}$ par l'équation

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}\mathbf{H}\mathcal{U}.$$

Dans le cas où il y a un hamiltonien, celui-ci s'identifie avec l'opérateur $\mathbf{H}$, mais l'opérateur $\mathbf{H}$ existe du moment qu'il y a dérivabilité; cependant on ne peut pas affirmer qu'il possède, dans le cas général, les propriétés des opérateurs attachés aux grandeurs physiques. On voit donc que dans tous les cas, on a des éléments initiaux et des éléments de prévision qui jouent le rôle de fonctions d'ondes généralisées.

Dire qu'il n'y a pas d'opérateur hamiltonien et qu'on doit renoncer complètement à un formalisme analogue à celui de la mécanique ondulatoire reviendrait à affirmer que les éléments de prévision, qui sont des fonctions continues du temps, sont des fonctions non dérivables du temps, car, sans cela, un

---

(1) Séance du 9 février 1948.

(2) J. L. Destouches, *Principes fondamentaux de Physique théorique*, II, 1942.

(3) Mme P. Destouches-Février, *Comptes rendus*, **222**, 1946, p. 866.

opérateur **H** existerait comme nous venons de le voir, et les éléments de prévision satisferaient à une équation

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} \mathbf{H} X.$$

qui a même aspect formel que l'équation d'onde. Or toute fonction continue non dérivable peut être approchée par des fonctions continues et dérivables, et comme les mesures physiques n'ont qu'une précision limitée et sont en nombre fini, il est impossible de distinguer expérimentalement si une fonction liée à des résultats d'expérience est continue sans dérivée ou est continue et dérivable. En sorte qu'on doit pouvoir effectuer aussi bien les prévisions en utilisant les fonctions dérivables, donc en acceptant que les éléments de prévision satisferont à une équation différentielle d'évolution. Par conséquent, *on peut, même dans les cas qu'envisage Heisenberg* (4), *conserver l'aspect général du formalisme qui a été introduit par la mécanique ondulatoire.*

3. Il n'en résulte pas que l'opérateur **H** se comporte comme un hamiltonien de la mécanique ondulatoire et soit donc constitué de termes concernant l'énergie massique au repos et l'énergie cinétique de chaque corpuscule du système et des termes d'interaction deux à deux. Si l'on tient compte de la complémentarité corpuscules-système mise en évidence par Louis de Broglie (5) et reprise par Mme Destouches-Février (6), on est conduit à la même conclusion que M. Heisenberg, à savoir *qu'il est vain de chercher un hamiltonien qui soit de la forme que nous venons d'indiquer.* Au contraire, la forme de l'opérateur **H** doit résulter des raisons mises en évidence par Mme Destouches-Février.

Mais comme M. Heisenberg admet que la notion d'énergie totale d'un systéme subsiste dans le cas où il intervient de grandes énergies, un opérateur correspond à cette dernière grandeur et cet opérateur doit être étroitement lié à l'opérateur **H**. D'autre part, les raisons avancées par MM. Heisenberg et Møller (7), en faveur de l'existence de la matrice caractéristique **S**, doivent être maintenues sous réserve de la difficulté qu'entraîne la considération du centre de gravité en mécanique relativiste des systèmes. Mais, dans le cas général, aussi bien que dans le domaine de la mécanique ondulatoire, il n'y a pas de raison pour que des lois simples se manifestent, et la liaison entre l'opérateur **H** et la matrice **S** doit demeurer compliquée. Au contraire, il semble possible de parvenir à expliciter la forme de l'opérateur **H**, et, pour conclure, *il semble donc que, dans une théorie nouvelle, en dépit du rôle important joué par la matrice* **S**, *le formalisme général habituel puisse être maintenu.*

---

(4) *Zeits. f. Physik*, 1943, B. **120**, p. 513 et 673.

(5) *Rev. de Méta et Morale*, **49**, 1937, p. 353; *Physique et Microphysique*, 1947, p. 296.

(6) *Comptes rendus*, **226**, 1948, p. 468.

(7) *Kgl. Danske, Vid. Selskab, Mat. Phys. Med.*, B. **22**, 1945, p. 1, n° **19**; B. **23**, 1946, p. 1, n° 1.

CHALEUR. — *Influence de l'état de surface d'un matériau rayonnant sur la valeur de son facteur d'émission à haute température.* Note (1) de M. **Marcel Michaud**, présentée par M. Gustave Ribaud.

L'étude du rayonnement thermique des surfaces rugueuses a montré que, pour un matériau de composition chimique déterminée, le facteur d'émission à haute température variait notablement suivant l'état de surface de l'échantillon soumis aux mesures. Nous supposons qu'une surface émettrice-unité est constituée par la juxtaposition de cavités (toutes identiques pour simplifier) de surface totale n et de facteur d'émission propre ε_0, et de parties lisses de surface $1-n$ et de facteur d'émission ε. On montre alors que :

$$\varepsilon' = n\varepsilon_0 + (1-n)\varepsilon.$$

1° Si l'on peut écrire $\varepsilon_0 = 1$, on a, en passant aux facteurs de réflexion, pour la même longueur d'onde et la même température,

$$\frac{\rho'_{\lambda T}}{\rho_{\lambda T}} = 1 - n.$$

Ce rapport est indépendant de la longueur d'onde, de la température et du matériau.

2° La formule classique approchée de correction pour les corps noirs imparfaits est (2)

$$\varepsilon_0 = 1 - \rho\frac{\Omega}{\pi} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\rho'_{\lambda T}}{\rho_{\lambda T}} = 1 - n + n\frac{\Omega}{\pi};$$

ce rapport ne dépend encore que de l'état de surface.

3° Pour plus de précision, nous devrions adopter la formule de A. Gouffé (3).

Donc, des mesures de diffusion permettent la comparaison de divers échantillons à la température ordinaire. Les formules garderont toute leur valeur pour l'émission à haute température. Nous avons ainsi comparé différents échantillons découpés dans des briques réfractaires en traçant les polaires de diffusion (4). La plus grande partie des échantillons obéit à la loi de Lambert, et des microphotographies montrent de plus que la surface est entièrement constituée par des cavités contiguës, donc que $n = 1$.

Par suite, lorsqu'on mesure le facteur d'émission d'un tel matériau, on mesure en fait le facteur d'émission moyen d'un ensemble de cavités, dont les

---

(1) Séance du 9 février 1948.

(2) G. Ribaud, *Traité de Pyrométrie optique*, p. 232; A. Baritel, *Chaleur et Industrie*, 1938.

(3) *Revue d'Optique*, nos 1-3, 1945,

(4) A. Canac, *Journée des États de surface*, 1945, p. 149.

facteurs d'émission propres sont compris entre ε et 1.

$$\varepsilon' = \varepsilon_0 = 1 - \rho\frac{\Omega}{\pi} \qquad \text{et} \qquad \frac{d\varepsilon'}{dT} = -\frac{\Omega}{\pi}\cdot\frac{d\rho}{dT}\cdot\frac{\Omega}{\pi}\cdot\frac{d\varepsilon}{dT}$$

Donc une faible variation de Ω peut modifier dans de grandes proportions la loi de variation des facteurs d'émission en fonction de la température. Plus Ω diminue, plus la variation de ε' avec T s'atténue et cette grandeur tend vers l'unité pour toutes températures quand Ω tend vers O.

Des mesures de facteurs d'émission monochromatiques et totaux ont été faites en faisant tourner dans une flamme oxy-gaz des échantillons cylindriques percés d'un trou axial. Des pointés au pyromètre optique et à la pile thermo-électrique donnaient les températures vraies, de brillance et de radiation. Dans l'intervalle 1000 à 1500°C., les températures de brillance et de radiation se sont toujours trouvées être des fonctions linéaires de la température vraie.

Le tableau I montre, à titre d'exemple, la comparaison par diffusion de deux échantillons de briques de fours à coke, pour trois longueurs d'onde. L'échantillon n° 2 est nettement plus rugueux que le n° 1. Le tableau II donne les valeurs différentes de la température de radiation correspondant à la même température de brillance, pour les deux échantillons. Le passage aux températures vraies accentue encore cette différence.

TABLEAU I.

	Lumière rouge (R).		Lumière verte (V).		Lumière blanche (B).		Rouge.	Vert.	Blanc.
Échant.	1.	2.	1.	2.	1.	2.	ρ'_2/ρ'_1.	ρ'_2/ρ'_1.	ρ'_2/ρ'_1.
	67	43	45	28	323	196	0,642	0,622	0,607

	V/R.	R/B.	V/B.
Échantillon 1	0,672	0,208	0,140
» 2	0,652	0,219	0,143

TABLEAU II.

Temp. de brillance (rouge) S_1 (°K)..	1373	1423	1473	1523	1573	1623	1673	1723
» radiation T_Γ (°K) N° 1..	1305	1353	1401	1448	1497	1546	1594	1642
» radiation T_Γ (°K) N° 2..	1318	1366	1415	1464	1513	1562	1611	1660

PHYSIQUE NUCLÉAIRE — *Sur l'explication d'un ensemble de faits expérimentaux par l'existence d'une particule intermédiaire légère dans les grandes gerbes du rayonnement cosmique.* Note [1] de MM. **Pierre Auger**, **Jean Daudin**, **André Fréon** et **Roland Maze**, présentée par M. Frédéric Joliot.

1. Dans une précédente Note [2] nous avons proposé d'expliquer les divergences entre les résultats de la théorie des cascades photoélectroniques

---

(1) Séance du 26 janvier 1948.

(2) *Comptes rendus*, **226**, 1948, p. 169.

appliquée aux grandes gerbes de l'air et les faits expérimentaux par la présence dans ces gerbes de particules chargées possédant une masse valant environ 3 à 10 fois celle de l'électron. Nous précisons ici quelles caractéristiques doit posséder une telle particule provisoirement appelée méson λ, pour rendre compte des phénomènes observés. Tout d'abord, nous lui attribuons la charge de l'électron, et admettons sa création par paires des deux signes : les clichés de chambre à détente ([3]) montrent en effet très généralement des trajectoires d'aspects semblable à celle des électrons, et relativement souvent des trajectoires doubles formant des paires de petit écart angulaire. Sa masse est faible; en effet, si certains faits peuvent être expliqués par une abondance de particules assez lourdes (masse 200), mais de faible énergie, les clichés de détente viennent au contraire s'opposer à une telle interprétation car ils montrent très peu de trajectoires fortement ionisantes. D'autre part, les particules en question sont nécessairement très abondantes dans les grandes gerbes, et comme la création d'une paire de particules est d'autant plus probable que leur masse est faible, on a choisi les masses 3 et 10 pour base de calcul.

2. Il est possible d'évaluer les pertes d'énergie par ionisation et par radiation de telles particules. Les premières sont données par la formule de Bloch, qui est valable pour les électrons ($m=1$) et les mésons $u(m=200)$ pour les énergies considérées ici. Les pertes par radiation sont plus incertaines; cependant, en première approximation, on peut admettre qu'elles varient, à vélocité égale, comme l'inverse du carré de la masse ([4]), et les déduire de celles calculées pour l'électron.

Les pertes totales d'énergie (ionisation + radiation) dans l'air et le plomb en fonction de l'énergie étant ainsi calculées, l'énergie critique Ec (énergie pour laquelle les pertes par ionisation et radiation sont égales), et les parcours moyens R dans le plomb qu'on en déduit sont indiqués ci-dessous.

Masse.	Ec (Air) (eV).	Ec(Pb) (eV).	R(cm Pb) pour E = Ec (Pb).	R(cm Pb) pour E = Ec (Air).
1	$1,5\ 10^{8}$	$8\ 10^{6}$	0,4	1,85
3	$3\ 10^{10}$	$2,8\ 10^{8}$	10	12
10	$1,7\ 10^{11}$	10^{10}	$\sim$100,4	$>$100,85

R augmente très vite avec la masse. Les parcours respectifs dans le plomb des particules ayant l'énergie critique, Ec (Pb), Ec (Air) figurent dans la dernière colonne. Pour l'air, un électron d'énergie critique ($1,5.10^{8}$ eV) a un parcours moyen de 300^{m}, celui d'une particule de masse 3 ayant l'énergie critique (3.10^{10} eV) est de $6^{\text{km}},8$ (atmosphère à densité constante), ce qui correspond à $12\text{-}15^{\text{km}}$ de parcours réel se terminant au niveau de la mer.

([3]) Heitler, *Quantum Theory of Radiation*, 1944, p. 222.

([4]) Daudin, *Ann. Phys.*, 20, 1945, p. 563-584.

3. Si les mésons λ sont instables, on peut calculer leurs longueurs de parcours moyen L en fonction de leur moment cinétique moyen p par la formule $L = \tau c(pc/mc^2)$, τ étant la vie moyenne. On établit ainsi que les effets dus à la désintégration peuvent devenir notables pour $\tau \leq 10^{-7}$ sec., valeur pour laquelle L est du même ordre de grandeur que le parcours moyen dû aux pertes d'énergie dans l'air d'une particule de masse 3.

4. En leur attribuant une distribution spectrale d'énergie analogue à celle observée pour les autres composantes du rayonnement, la masse 3 permet de rendre compte de la partie médiane (5 à 15^{cm} de plomb) de la courbe expérimentale d'absorption des particules de grandes gerbes ([4]), ([5]). Les mésons μ de masse 200 constituant à 1 à 2 % du rayonnement des grandes gerbes expliqueraient alors l'absorption plus faible observée pour les grandes épaisseurs d'écrans.

Les mésons λ permettent également d'expliquer le nombre élevé des coïncidences observées entre des compteurs distants de plusieurs mètres et couverts de 10^{cm} de Pb et qui n'est explicable, ni par la présence de seulement 1 à 2 % de mésons μ dans la radiation des grandes gerbes, ni par la théorie des cascades. Cette théorie indique en effet que des électrons possédant l'énergie nécessaire (10^{12} eV) pour traverser les écrans ne devraient guère se trouver dans l'air à plus de 6^{mm} de distance. Les parcours dans l'air des mésons λ rendent compte de l'extension en surface des grandes gerbes et notamment des résultats expérimentaux de Skobeltzyn ([6]) pour l'explication desquels l'extension due aux photons seuls paraît insuffisante.

5. Si l'on place contre la paroi de compteurs des écrans de quelques millimètres de plomb, on observe une augmentation de comptage due aux photons d'énergies comprises entre les énergies critiques dans l'air et dans le plomb ([7]), ([8]). D'autre part, si l'on dispose une voûte de l'ordre de 2^{cm} de plomb sur un ou plusieurs compteurs en coïncidence, on constate une augmentation de comptage due aux cascades photoélectroniques. Le premier de ces deux effets est plus petit que celui qui serait observé si les photons étaient seuls responsables de l'extension des grandes gerbes. Le second effet disparaît si l'on étudie des gerbes d'extension supérieure à 50^{m} ([9]). Ces deux faits s'expliquent si les mésons λ sont également responsables de l'extension latérale des grandes gerbes.

6. Un méson λ, de masse faible, donne donc par ses propriétés probables la solution de quelques-uns des problèmes posés par les expériences sur les

---

([5]) P. Auger, R. Maze, P. Ehrenfest et A. Fréon, *J. de Phys.*, 10, 1939, p. 39-49.

([6]) *Phys. Rev.*, 71, 1947, p. 315-317.

([7]) J. Daudin et A. Fréon, *Comptes rendus*, 214, 1942, p. 662-664.

([8]) P. Auger et J. Daudin, *Comptes rendus*, 212, 1941, p. 897-900.

([9]) P. Auger et collaborateurs, *Rev. Modern Physics*, 11, 1939, p. 288-291.

grandes gerbes et dont une partie seulement a été évoquée ici. Notons cependant que s'il subit des interactions nucléaires importantes, il faut au méson λ une masse plus grande pour rendre compte des effets observés.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Orientation des films minces d'oxyde cuivreux formés sur le cuivre.* Note de M. **Henri Frisby**.

Nous avons consigné dans une Note précédente [1] les premiers résultats de nos travaux sur les surfaces de cuivre polies électrolytiquement. Signalons à ce propos une erreur matérielle qui s'est glissée dans le dernier paragraphe de cet exposé : les aspérités de la surface polie sont réduites à une hauteur de 5 mailles élémentaires et non pas de 50.

Nous avons ensuite étudié plus particulièrement les films d'oxyde cuivreux qui se forment à la surface du cuivre chauffé à 100° dans l'eau bouillante. Les premières couches de Cu_2O qui se développent sur un monocristal de cuivre sont également monocristallines. L'orientation des axes de symétrie de cet oxyde, par rapport aux axes de symétrie du cuivre sous-jacent, avait fait l'objet de travaux de Mehl, Mac Candles et Rhines [2]. Ils montrèrent que l'introduction d'oxygène dans le réseau du cuivre a pour résultat une simple dilatation de la maille, sans changement d'orientation. Yamaguti [3], analysant des surfaces de monocristaux de cuivre oxydées à l'air vers 1000°, trouve trois orientations relatives différentes de l'oxyde par rapport au cuivre.

Nous avons essayé de généraliser ces résultats, en étudiant des surfaces de cuivre d'orientations quelconques, à l'aide d'un appareil de diffraction électronique. Un cristal de cuivre, taillé parallèlement à un axe de symétrie binaire de la maille, donne un diagramme de réflexion formé d'un réseau de losanges, quand le faisceau électronique (sous incidence rasante) est approximativement parallèle à l'axe de symétrie. Dans ces losanges, où le rapport des diagonales est égal à $\sqrt{2}$, la grande diagonale indique la direction de la normale aux plans réticulaires [110]. Le diagramme de la figure 1 a été obtenu avec une telle surface. Le plan [110] est incliné de 62° sur la surface libre du cuivre.

L'oxydation superficielle de cette surface, limitée à une fraction de micron d'épaisseur, fournit une couche monocristalline d'oxyde cuivreux. Examinée aux électrons, dans la même position que la surface de métal décapée, elle fournit le diagramme de la figure 2.

L'axe de symétrie binaire de l'oxyde est parallèle à l'axe correspondant du métal, mais le plan réticulaire [110] de l'oxyde est parallèle à la surface libre

(1) *Comptes rendus*, 224, 1947, p. 1003.

(2) *Nature*, 1934, p. 1009.

(3) *Proceedings of the Physical and Mathematical Society of Japan*, **20**, 1938, p. 230.

de l'échantillon. On en déduit que les axes ternaire et quaternaire doivent également se trouver dans un plan parallèle à cette surface. Cela est confirmé par l'examen électronique. D'autres surfaces, approximativement parallèles à

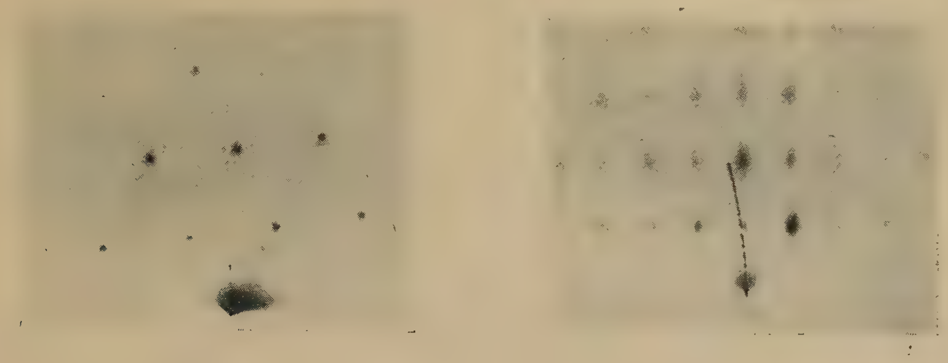


Fig. 1. Fig. 2.

un axe de symétrie d'ordre 2, mais faisant un angle différent avec le plan [110], ont donné des résultats analogues. L'oxyde avait dans chaque cas l'orientation indiquée par la figure 2 : un plan diagonal du cube élémentaire de Cu_2O (plan [110]) était toujours parallèle à la surface de l'échantillon et un axe binaire de l'oxyde était parallèle à un axe binaire du métal. Remarquons incidemment que nous avons trouvé une proportion notable de surfaces de cuivre très voisines d'un plan contenant un axe de symétrie d'ordre 2. Cela peut s'expliquer par le nombre élevé d'axes de cet ordre dans le système cubique et par la tolérance angulaire de quelques degrés sur la position du cristal que permet l'analyse électronique.

Ainsi, dans les conditions expérimentales que nous avons adoptées, l'oxydule s'oriente à la fois par rapport à un axe de symétrie du métal sous-jacent et par rapport au plan de la surface libre de l'échantillon. Mais cette surface libre n'est plane qu'à l'échelle macroscopique. En effet, l'obtention d'un diagramme net exige l'utilisation de surfaces légèrement dépolies dont les irrégularités doivent être considérables à l'échelle atomique. Ce serait donc un ensemble d'atomes, situés à grande distance, qui jouerait un rôle prépondérant au cours des remaniements nécessaires à la mise en place des atomes d'oxygène parmi les atomes de cuivre.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Sur l'existence d'une valence de protactinium inférieure à 5.* Note [1] de MM. **Moïse Haïssinsky** et **Georges Bouissières**, présentée par M. Frédéric Joliot.

Par la position du protactinium dans le système périodique et par les propriétés de ses homologues, on pouvait supposer que cet élément possède un

(1) Séance du 9 février 1948.

état de valence inférieure à 5, sa valence normale. On ne connaissait toutefois jusqu'ici aucune indication expérimentale en faveur de cette hypothèse. Celle-ci est confirmée d'une façon concluante par les expériences que nous venons de réaliser.

Pa^{V} forme un fluorure facilement soluble en milieu acide même très dilué, tandis que les fluorures de ses voisins de valence inférieure, Th^{IV}, U^{IV}, Ac^{III}, ne le sont pas. On pouvait alors penser que le fluorure de Pa réduit serait également insoluble (²). D'autre part, l'ensemble des propriétés chimiques de Pa et l'examen des conditions d'oxydo-réduction des éléments de propriétés voisines rendent le choix du réducteur éventuel assez limité. Nous avons eu recours à un amalgame de zinc et opéré de la façon suivante :

8 à 10^{cm^3} d'une solution de HClN contenant les chlorures de zirconyle (20 à 60^{mg}), de La (20^{mg}) et de Pa (quelques centièmes ou dixièmes de milligramme) sont laissés au contact de l'amalgame dans une colonne à réduction de Jones. Le tube est monté sur un buchner en plexiglass contenant quelques centimètres cubes de HF à 4 % et ajusté sur une fiole à filtration sous vide. Un courant d'hydrogène circule constamment dans l'appareil. Après deux ou trois heures de contact on laisse écouler, par ouverture d'un robinet, la solution chlorhydrique dans le buchner. Le fluorure de lanthane, insoluble, précipite, tandis que le zirconium reste dissous. Les deux produits sont séparés par filtration, toujours dans l'atmosphère d'hydrogène, et ensuite transformés en oxydes. La teneur de ceux-ci en Pa est déterminé par la mesure du rayonnement α.

Ce dosage a montré que 40 à 50 % de Pa sont retenus par le fluorure de La. Dans les essais à blanc, c'est-à-dire effectués sans contact du protactinium avec l'amalgame, 4 à 5,5 % seulement ont été retenus par LaF_3 dans des conditions par ailleurs identiques aux précédentes.

La coprécipitation du protactinium avec LaF_3 en présence du fluorure de Zr est une indication certaine d'un changement de valence de l'élément. Dans les conditions décrites, la réduction semble se produire lentement, puisque pour des durées de contact plus courtes, la proportion de Pa retenu est nettement plus faible.

Nous poursuivons l'étude des propriétés de Pa dans le nouvel état de valence dont nous essaierons de déterminer la valeur. Quelle que soit celle-ci, l'existence de deux degrés d'oxydation du protactinium faciliterait grandement sa purification et sa séparation laborieuse de ses entraîneurs habituels, Ta et Zr.

(²) Le fluorure de Nb^{III} est soluble, mais celui de son voisin Zr^{IV} l'est également.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Spectres d'absorption infrarouges de trimétaphosphates métalliques.* Note de MM. **Jean Lecomte**, **André Boullé** et Mme **Marthe Dominé-Bergès**, présentée par M. Pierre Jolibois.

Nous avons étudié, pour la première fois, à l'état de poudre, dans la région comprise entre 700 et 1450 cm^{-1} environ, les spectres d'absorption infrarouges des trimétaphosphates de sodium, de potassium, d'argent et de plomb [1].

1. Le *trimétaphosphate de sodium* a été obtenu :

a. par déshydratation du pyrophosphate acide de sodium dans le vide à 250°C. [2];

b. par la méthode de Knorre à 300°C. [3];

c. par calcination du métaphosphate B (sel de Maddrell) à 550°C. [4];

d. par recuit à 300° du métaphosphate vitreux C ou sel de Graham [5], provenant de la fusion du triméta à 640°, suivie de la trempe du liquide;

e. par l'intermédiaire du trimétaphosphate d'argent [6] suivant la réaction

$$(PO_3)_3Ag_3 + 3\,ClNa \rightarrow (PO_3)_3Na_3 + {}_3ClAg$$

effectuée à 0°.

Les trimétaphosphates d'argent et de plomb résultent de la précipitation directe à 0° C. des nitrates correspondants par le triméta de sodium.

Le trimétaphosphate de potassium a été obtenu par l'intermédiaire du triméta d'argent.

Certains spectres ont été mesurés sur des échantillons préparés de la même manière, mais à plusieurs mois d'intervalle. La grande similitude que l'on constate indique bien *qu'il existe un spectre type et que la méthode de préparation conduit exactement au même produit de condensation, si elle est correctement appliquée. Nos determinations permettent de confirmer la validité du cycle à l'argent pour la préparation générale des trimétaphosphates métalliques* [6], *lorsque le chlorure du métal est soluble* [7].

Les régularités spectrales que nous avons trouvées permettent de *fournir une nouvelle preuve de la stabilité du trimétaphosphate de sodium* [8], *quelles que soient : a. son origine et la température de préparation; b. la filiation suivie, même après fusion.*

Les spectres infrarouges se montrent donc très utiles pour compléter et

---

[1] P. Lambert et J. Lecomte, *Comptes rendus*, **189**, 1929, p. 155; J. Lecomte, *Cahiers de Physique*, **17**, 1943, p. 1.

[2] Boullé, *Comptes rendus*, **206**, 1938, p. 915.

[3] *Zeit. anorg. Chem.*, **24**, 1900, p. 369, la préparation est basée sur la réaction suivante :

$$NO_3NH_4 + PO_4HNa_2 \rightarrow PO_3Na + NO_3Na + NH_3 + H_2O.$$

[4] Boullé, *Thèse*, Paris, 1941, p. 34.

[5] Boullé et Paris, *Comptes rendus*, **209**, 1939, p. 223.

[6] Boullé, *Thèse*, Paris, 1941, p. 23.

[7] Boullé, *Comptes rendus*, **206**, 1938, p. 517.

[8] Boullé, *Thèse*, Paris, 1941, p. 70.

même remplacer jusqu'à un certain point les autres méthodes d'identification et de caractérisation des trimétaphosphates (analyse chimique, cryoscopie, rayons X, etc.).

Ainsi, lorsqu'on emploie la méthode de Knorre avec un chauffage insuffisant, du pyrophosphate peut se former et sa présence est mise en évidence par des bandes d'absorption caractéristiques dans le spectre du trimétaphosphate impur.

II. Tous les trimétaphosphates étudiés possèdent les régions d'absorption suivantes : vers 685 cm^{-1} (faible douteuse), entre 740 et 770 cm^{-1} (une ou deux bandes distinctes assez fortes ou fortes), vers 990 cm^{-1} (forte), entre 1100 et 1115 cm^{-1} (forte), entre 1280 et 1300 cm^{-1} (forte), vers 1500 cm^{-1} (faible ou moyenne).

Comme dans le cas d'autres sels métalliques, la variation du métal conduit à des déplacements incohérents pour les bandes. Le principal changement se produit dans la région de 730 à 780 cm^{-1}, où il apparaît, suivant le cation, une ou deux bandes distinctes.

III. *Interprétation des résultats.* — L'ion PO_3 que l'on peut considérer comme pyramidal, possède, on le sait, quatre modes de vibration distincts : deux simples ν_1 et δ_3, deux doubles dégénérés δ_{12} et ν_{23} tous actifs à la fois dans l'absorption et dans la diffusion ; ν_i désigne les vibrations de valence et δ_i les vibrations de déformation. Nous admettrons que l'ion $(PO_3)^3$ présente la symétrie C_{3v} (un axe ternaire et trois plans de symétrie passant par l'axe). Le plan des trois atomes de phosphore est perpendiculaire à l'axe ternaire et contient les trois axes de symétrie ternaires, correspondant à chacun des groupements PO_3. Il peut exister au plus trente modes de vibration (dont 3 inactifs dans l'absorption) et en réalité ils se réduisent à 20 modes distincts, car 10 vibrations apparaissent doubles dégénérées. On peut les déduire des quatre oscillations ν_1, ν_{23}, δ_{12}, δ_3 de la manière suivante : suivant que l'on couple, en concordance ou en discordance de phase, les trois groupements PO_3, exécutant une oscillation simple telle que ν_1, on obtiendra, pour l'ensemble $(PO_3)^3$, soit une vibration simple, soit une oscillation double dégénérée. A partir de translations ou de rotations de l'ion PO_3, qui ne conduisent ni à des bandes d'absorption ni à des raies Raman dans le cas où cet ion est libre, on obtient de la même manière pour l'ensemble $(PO_3)^3$, une vibration simple et une vibration double dégénérée. Pour les vibrations dégénérées ν_{23} et δ_{12}, il faut remarquer que l'axe ternaire de chaque groupement PO_3 ne représente plus un axe de symétrie de l'ensemble $(PO_3)^3$, de sorte que les dégénérescences étant levées, nous devons considérer pour ν_{23} et δ_{12}, non pas deux, mais quatre vibrations distinctes, donnant chacune, pour l'ensemble $(PO_3)^3$, une vibration simple et une vibration double dégénérée.

Il est facile de voir que, dans la région spectrale étudiée, tombent, pour $(PO_3)^3$, seulement six vibrations : deux provenant de ν_1 et quatre de ν_{23}.

Si l'on se borne aux bandes fortes, nos mesures en indiquent cinq au lieu des six que l'on prévoit ainsi. Il n'est d'ailleurs pas étonnant qu'il manque une bande d'absorption, car les fréquences de deux au moins des vibrations doivent se présenter comme assez voisines et il est à penser que nous n'avons pu les séparer.

En résumé, les trimétaphosphates métalliques représentent un nouvel exemple où les spectres d'absorption infrarouges renseignent sur le degré de condensation des produits obtenus.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Détermination magnéto-optique de la structure de l'acide phosphoreux.* Note de MM. **Fernand Gallais** et **Daniel Voigt**, présentée par M. Paul Pascal.

Le problème classique de la constitution de l'acide phosphoreux a déjà suscité bien des recherches. Rappelons que, suivant que l'on considère cet acide comme le premier terme de la série des esters phosphoreux ou phosphoniques, sa formule la plus significative doit être

$$P\begin{smallmatrix}\diagup OH\\ -OH\\ \diagdown OH\end{smallmatrix}\ (I) \quad ou \quad O\leftarrow P\begin{smallmatrix}\diagup OH\\ -OH\\ \diagdown H\end{smallmatrix}\ (II),$$

formules dans lesquelles l'atome de phosphore est respectivement tri et tétracoordonné. De nombreux travaux portant, soit sur la constitution de l'acide phosphoreux, soit sur celle de ses ions, ont abouti à des conclusions contradictoires, leurs auteurs étant en faveur soit de l'une, soit de l'autre forme, soit même d'une tautomérie entre celles-ci.

Pour contribuer à la solution de ce problème, nous avons mesuré le pouvoir rotatoire magnétique moléculaire d'esters phosphoreux et phosphoniques et, après avoir constaté que ceux-ci se distinguent nettement du point de vue de leur effet Faraday, nous avons recherché à quelle série appartient l'acide PO_3H_3.

Dans le tableau ci-après, sont rassemblés les pouvoirs rotatoires magnétiques moléculaires $[\Lambda]_M$ (pour la radiation jaune du mercure $\lambda = 0^\mu,5780$) des différents esters étudiés et les modules que l'on peut affecter à l'acide dont ils proviendraient, en retranchant des constantes des esters la contribution des radicaux hydrocarbonés. Ces modules ont d'abord été calculés (colonne I) en adoptant uniformément la valeur de 25.10^{-2} minute pour la contribution d'un CH_2 normal, c'est-à-dire lié à un atome de carbone ou d'oxygène comme c'est le cas généralement pour les molécules organiques [R. de Malleman ([1])]. Dans ces conditions, il apparaît avant tout qu'il n'y a pas accord entre les modules correspondant au premier terme des phosphonates dialcoyliques et au premier terme des alcoylphosphonates dialcoyliques.

	$[A]_{M(0.578)}$.	Module de PO_3H_3 (calculé) I.	Module de PO_3H_3 (calculé) II.
Phosphite de méthyle	$207,3.10^{-2}$	$132,3.10^{-2}$	
Phosphite d'éthyle	285,0	135,0	
Phosphite de butyle	427,8	127,8	
Phosphonate diméthylique	128,5	78,5	
Phosphonate diéthylique	182,9	82,9	
Éthylphosphonate diéthylique	223,0	73,0	$83,0.10^{-2}$
Butylphosphonate dibutylique	370,2	70,2	80,2

On ne saurait s'en étonner puisque le passage de l'ester diéthylique à l'éthylester diéthylique, par exemple, se traduit par l'introduction d'un CH_2 du type normal et d'un CH_2 directement lié au phosphore. La différence de module entre les deux esters étant égale à 40, on peut, en donnant au premier CH_2 sa valeur normale, 25, évaluer à $40 - 25 = 15$, celle du chaînon lié au phosphore (toutes ces valeurs étant exprimées en centièmes de minute).

En introduisant cette dernière valeur dans nos calculs, les nouveaux modules obtenus pour le premier terme des alcoylphosphonates (colonne II) deviennent compatibles avec ceux qui correspondent au premier terme des phosphonates. Les différences que l'on observe entre l'ensemble des résultats numériques provenant des phosphonates sont alors du même ordre de grandeur que celles qui existent entre les résultats provenant des phosphites. La moyenne de ces modules est :

Acide phosphoreux (premier terme des esters phosphoreux) : $(132 \pm 3,5).10^{-2}$.
Acide phosphonique (premier terme des esters phosphoniques) : $(81,2 \pm 2,5).10^{-2}$.

Nous avons, d'autre part, étudié l'acide phosphoreux pur, maintenu à l'état liquide dans un tube muni d'une chemise à circulation d'eau chaude ($t = 76°$). Nous avons trouvé pour ce corps : $[A]_{M(0,578)} = 83,0.10^{-2}$.

On voit que la valeur relative à l'acide pur est comprise entre les valeurs extrêmes calculées à partir des esters phosphoniques.

Si l'on remarque que ce sont probablement les esters éthyliques et propyliques qui représentent le mieux une série, il est d'ailleurs intéressant de constater l'identité de la valeur mesurée pour l'acide avec celles calculées à partir des esters éthyliques.

Ajoutons que des mesures de réfraction moléculaire nous ont conduits à des résultats tout à fait identiques à ceux que nous avons obtenus par l'emploi de l'effet Faraday.

Sans préjuger de la nature de l'anion qui lui correspond, on peut donc conclure que, aux erreurs d'expérience près, l'acide que l'on désigne sous le nom d'acide phosphoreux semble uniquement constitué par de l'acide phosphonique.

Signalons du reste que l'étude du spectre Raman de l'acide pur A. Simon et

F. Feher ([1]); R. Ananthakrishnan ([2]) permet de mettre en évidence les raies caractéristiques de la liaison P—H, qui ne peuvent provenir que de la forme phosphonique.

CHIMIE MINÉRALE. — *Sur un aluminate de nickel hydraté.* Note ([1]) de Mlle **Jacqueline Longuet**, présentée par M. Paul Lebeau.

Le composé $Al^2O^3.NiO$ qui a été étudié par S. Holgersson ([2]) d'après son diagramme de Debye-Scherrer, présente une structure de spinelle. Cet aluminate de nickel était préparé par fusion simultanée des deux oxydes. D'autres auteurs le préparent par recuit, entre 800° et 1000°, du mélange des oxydes. D'après les résultats que nous avons obtenus antérieurement au sujet des ferrites ([3]), dont la structure est identique, nous pensions pouvoir faire la synthèse de ce spinelle à partir des hydroxydes, à basse température. Nous avons précipité simultanément les deux hydroxydes par la soude à partir du mélange en proportions convenables des solutions de chlorures de nickel et d'aluminium : le corps obtenu, qui se présente sous la forme d'un gel, donne après dessiccation un diagramme présentant deux séries de raies : les premières, relativement fines, sont identiques à celles que donne un gel d'alumine précipité dans les mêmes conditions; les secondes, floues, n'appartiennent ni aux différentes variétés d'alumine, ni à l'hydroxyde de nickel, ni à un spinelle. Si l'on chauffe ce produit à 100° en présence d'eau, le diagramme reste inchangé, mais l'état de cristallisation s'améliore. La précipitation séparée des deux hydroxydes, suivie du mélange puis du chauffage à 100° en présence d'eau, donne un résultat identique à la coprécipitation.

Il semblait donc que l'on était en présence d'un corps nouveau, que nous avons supposé être un aluminate de nickel hydraté, différent du spinelle, obtenu par réaction dans l'état solide, à la température ordinaire, de l'hydroxyde de nickel sur l'alumine au moment même de leur précipitation. Ces deux hydroxydes se combineraient, dans ces conditions, en proportion non équimoléculaire, puisque l'on observe un important excès d'alumine : si cette hypothèse était exacte, en diminuant la proportion d'alumine, nous devions pouvoir isoler l'aluminate nouveau. C'est en effet ce que l'expérience a montré : nous avons préparé par la même méthode le corps correspondant à la composition : $Al_2O_3\ 2NiO,\ nH_2O$, dont le diagramme présente uniquement les raies

---

([1]) *Z. Anorg. Allg. Chem.*, 230, 1936, p. 289.

([2]) *Nature*, 138, 1936, p. 803.

([1]) Séance du 9 février 1948.

([2]) *Lunds Univ. Arskrift N. F. Avd.*, 2, 1927, p. 27.

([3]) H. Forestier et J. Longuet, *Comptes rendus*, 208, 1939, p. 1729, et J. Longuet, *Thèse*, Strasbourg, 1943.

élargies que nous avions observées en plus de celles de l'alumine pour le corps équimoléculaire. Les équidistances suivantes, exprimées en unités angströms, correspondent aux quatre principales raies, dont les intensités sont du même ordre de grandeur :

$$d_1 = 7{,}8 \qquad d_2 = 3{,}9 \qquad d_3 = 2{,}5 \qquad d_4 = 1{,}5.$$

L'équidistance de 3,9 peut être considérée comme le second ordre de celle de 7,8.

Nous avons pu préparer des plaquettes orientées, sur les diagrammes desquelles on observe sur l'équateur, un renforcement des deux anneaux de 7,8 et 3,9 Å qui se rapporteraient donc aux plans (001). Nous sommes donc vraisemblablement en présence d'un corps cristallisant en feuillets, et on peut noter à ce sujet que la ressemblance avec certains diagrammes d'argiles est frappante; c'est un point que nous tenterons de préciser ultérieurement.

Lorsque l'on fait varier la composition, on obtient des corps dont le diagramme reste inchangé, avec cependant une tendance au déplacement des anneaux vers le centre, c'est-à-dire à une augmentation des distances réticulaires, à mesure que l'on fait croître la proportion d'oxyde de nickel. Nous avons ainsi préparé les corps hydratés dont les proportions en oxydes sont données par les formules suivantes :

$$Al_2O_3\,4\,NiO, \quad Al_2O_3\,6\,NiO, \quad Al_2O_3\,8\,NiO, \quad Al_2O_3\,10\,NiO, \quad Al_2O_3\,15\,NiO.$$

Au delà de ces compositions les raies caractéristiques de l'hydroxyde de nickel apparaissent progressivement, en plus des raies déjà existantes.

Ces corps sont instables lorsqu'on élève leur température : la destruction de la structure s'opérant déjà avant 300°, probablement au moment du départ de l'eau. L'étude de l'évolution au-dessus de cette température est en cours.

Cet aluminate de nickel hydraté, dont la structure est différente de celle du spinelle, est à rapprocher de celui que S. Caillère et S. Hénin ont préparé indépendamment et par une méthode totalement différente ([4]).

CHIMIE MINÉRALE. — *Sur la préparation et quelques caractères d'une série d'aluminates hydratés.* Note ([1]) de Mlle **Simonne Caillère** et M. **Stéphane Hénin**, présentée par M. Paul Lebeau.

Dans une Note antérieure nous avons montré qu'il était possible de faire la synthèse d'une antigorite par électrolyse d'une solution de silicate de soude en employant une anode de magnésium ([2]), mais ce procédé n'a pas permis de

---

([4]) *Comptes rendus* (Note présentée à la même séance ci-dessous).

([1]) Séance du 9 février 1948.

([2]) *Compte rendus*, **224**, 1947, p. 1439-1440.

préparer d'autres silicates. Dans ces conditions, nous avons résolu d'entreprendre l'étude systématique des composés que l'on pourrait obtenir en électrolysant diverses solutions d'anions avec des anodes de différents métaux. Ces anions et ces métaux ont été choisis parmi ceux que l'on rencontre dans les silicates naturels.

Cette Note relate les résultats obtenus en électrolysant une solution d'aluminate de potassium avec, comme anode, l'un des métaux susceptibles de se situer dans la couche octaédrique des silicates phylliteux Al, Fe, Mg, Ni, Zn. La cathode était toujours en platine et quelques centimètres cubes d'une solution de NaCl à 10 % étaient introduits pour faciliter l'attaque de l'anode. Étant donné le but poursuivi, nous avons appliqué à ces substances les méthodes d'étude des silicates.

L'examen microscopique révèle qu'elles sont assez hétérogènes. Le constituant principal correspond à un aluminate. Le produit nickélifère vert pomme a un indice $n = 1,51$, il est biréfringent, biaxe positif avec un angle 2V petit. L'aluminate magnésien est blanc, également biréfringent ($n = 1,50$). Par contre, le composé zincifère blanc jaunâtre est presque isotrope ($n = 1,63$).

Tous apparaissent bien cristallisés, à l'examen aux rayons X, l'aluminate d'Al s'identifie à la boehmite. Les autres possèdent une équidistance principale voisine de 7,5 Å. Les produits magnésien et nickélifère donnent des plaquettes orientées et, de ce fait, sont phylliteux. Par ailleurs, l'ensemble de leurs diagrammes fait ressortir une analogie que l'on retrouve dans une certaine mesure, avec l'aluminate ferrifère. Le composé zincifère s'en distingue nettement.

La courbe thermique de la boehmite présente un crochet de départ d'eau hygroscopique très important et une inflexion vers 540° correspondant au dégagement de l'eau de constitution, celles des autres aluminates montrent trois crochets qui se situent à des températures voisines. Le premier traduit le départ de l'eau hygroscopique; le second apparaît entre 200° et 250°, il s'amorce dans le premier et correspond à un départ d'eau de constitution. Le troisième, dû à une cause analogue, se place entre 300° et 400°. Le caractère du deuxième crochet se trouve confirmé par l'examen aux rayons X des produits déshydratés à la température de cette inflexion, qui montrent tous la disparition des raies de grand écartement. En outre, il y a modification de l'ensemble du diagramme à l'exception de celui du produit zincifère.

L'analyse chimique ne permet pas de tirer de conclusions précises, ces produits contenant une quantité notable d'hydrates ainsi que le montre l'examen des diagrammes X. Néanmoins, ils se caractérisent, sauf la boehmite, par une teneur en alumine de l'ordre de 10 %. On peut donc conclure que le rapport Al_2O_3/RO est faible et que par ailleurs, il est variable. D'autre part, la quantité d'eau globale est élevée (de l'ordre de 30 %) sauf

dans le produit zincifère où elle est seulement de 12%. Ces propriétés rapprochent ces substances des aluminates de calcium hydratés ([3]).

En conclusion, les cinq cations étudiés peuvent se combiner avec l'alumine pour donner des corps cristallisés dont l'un d'eux est identique à celui préparé par Mlle J. Longuet ([4]). La boehmite et l'aluminate de zinc se placent à part et les trois autres composés forment un groupe relativement homogène. Si ces produits ne s'apparentent pas directement aux argiles, ces essais montrent toutefois l'identité de comportement des ions Mg, Ni et leur tendance à donner des produits phylliteux hydratés. Signalons également que ces substances présentent une grande stabilité ainsi que le montre leur résistance à l'action des acides concentrés et chauds, on peut donc supposer qu'ils existent dans le milieu naturel.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Action des acides α-halogénés sur les thiamides. Préparation des aryl et alcoyl 5-thiazolinones.* Note de M. **Pierre Chabrier** et Mlle **Simone-Hélène Renard**, transmise par M. Marcel Delépine.

L'action des acides α-halogénés a déjà été étudiée sur un certain nombre de composés possédant le groupement $—CSNH_2$. Tels la thiourée ([1]) ([2]) avec laquelle ils se combinent en donnant les pseudo-thiohydantoïnes [formule (I)] et la thiosemicarbazide ([3]) qui conduit aux hydrazothiazolinones [formule (II)].

$$\begin{array}{ccc} NH_2-C\!=\!\!=\!\!=\!N & & NH_2.NH-C\!=\!\!=\!\!=\!N \\ S\quad\quad CO & & S\quad\quad CO \\ CHR & & CHR \\ (I). & & (II). \end{array}$$

L'objet de cette Note est de montrer que les thiamides se comportent vis-à-vis des acides α halogénés d'une façon analogue à celle de la thiourée et de la thiosemicarbazide et de décrire quelques thiazolinones-5 substitués résultant de cette combinaison.

*Préparation des thiazolinones-*5 *substitués.* — Alors que les pseudothiohydantoïnes et les hydrazothiazolinones se préparent facilement en milieu alcoolique, dans tous les cas envisagés, il n'a pas été possible d'obtenir, dans ce solvant, les thiazolinones-5 substitués à partir des thiamides et des acides α halogénés. Il est vraisemblable que dans ces conditions le thioiminoéther qui se forme dans une première phase subit l'action de l'alcool, comme l'ont

---

([3]) M. Travers et J. Schountka, *Ann. Chimie,* 13, 1930, p. 252.

([4]) *Comptes rendus* (Note présentée à la même séance ci-dessous).

([1]) Werner, *J. Chem. Soc.*, 57, 1890, p. 283.

([2]) Taylor, *J. Chem. Soc.*, 111, 1917, p. 650.

([3]) Chabrier, *Bull. Soc. Chim.*, 5e série, 14, 1947, p. 800.

montré Kaufman et Adams (1), en donnant l'iminoéther

$$\begin{array}{l}R.C{=}NH\\ \ |\\ SR\end{array} + R_1OH \rightarrow \begin{array}{l}R.C{=}NH\\ \ |\\ OR_1\end{array} + RSH$$

Pour obtenir les thiazolinones-5 substitués, on peut, soit chauffer durant plusieurs heures parties équimoléculaires de thiamide et d'acide α-halogène au bain-marie, soit opérer en milieu toluénique à la température d'ébullition du toluène.

La réaction est lente et s'effectue en deux temps.

1° formation du thioiminoéther

$$R.CSNH_2 + XOHRCO_2H \rightarrow \begin{array}{l}R.C{=}NHXH\\ \ |\\ S{-}CHRCO_2H\end{array}$$

2° cyclisation du thioiminoéther avec départ d'acide halogéné

$$\begin{array}{l}R.C{=}NHXH\\ \ |\\ S{-}CHR.CO_2H\end{array} \rightarrow \begin{array}{l}R.C{=\!=}N\\ \ |\qquad\ |\\ S{-}CHR{-}CO\end{array} + XH$$

(III).

Dans certains cas, il n'a pas été possible de cycliser le thioiminoéther formé, ainsi nous n'avons pu obtenir de thiazolinones à partir d'acide α-halogéné disubstitué en l'espèce l'acide α-bromoisobutyrique $(CH_3)_2CBr.CO_2H$ et des thiamides.

Les thiazolinones-5 substitués peuvent être facilement purifiés par suite de leur insolubilité dans l'eau bouillante et les solvants organiques usuels à froid. On les purifie par cristallisation dans le toluène. Les rendements n'excèdent pas 25 % dans tous les cas considérés.

Propriétés des thiazolinones-5 substitués. — Les thiazolinones-5 substitués préparés ont un point de fusion élevé et assez mal défini, ils sont solubles dans les alcalis qui les décomposent lentement, mais insolubles dans le bicarbonate de potassium, ils ne donnent pas de thioéther par alcoylation directe. Cet ensemble de faits joint aux résultats de l'analyse élémentaire justifient la formule (III) que nous proposons pour représenter ces composés.

Composés nouveaux obtenus. — Phényl-5 thiazolinone C_9H_7ONS, F 250°; phényl-5 méthyl-3 thiazolinone $C_{10}H_9ONS$, F 205°; benzyl-5 thiazolinone $C_{10}H_9ONS$, F 229°; benzyl-5 méthyl-3 thiazolinone $C_{11}H_{11}ONS$, F 139°; pyridyl-5 méthyl-3 thiazolinone $C_9H_8ON_2S$, F 238°.

---

(1) *J. Am. Chem. Soc.*, 45, 1923, p. 1744.

GÉOLOGIE. — *Sur la tectonique du Massif du Pic du Midi de Bigorre.* Note de M. **Pierre Hupé**, présentée par M. Charles Jacob.

Selon G. Bresson (¹), l'Ordovicien granitisé, c'est-à-dire les migmatites (²), qui constitue le soubassement du massif du Pic du Midi, dessine une amygdale allongée WNW-SSE, bordée au Nord par un synclinal qui la sépare du « brachyanticlinal de Conques », et au Sud par une série dévonienne comportant deux ou trois synclinaux pincés de calcaires attribués à l'Eifelien-Givetien. Des levées de détail me conduisent à attribuer au Dévonien inférieur ces calcaires, clef de la tectonique locale, et par conséquent à placer en situation anticlinale ce que Bresson considérait comme synclinal et *vice versa*.

L'attribution des calcaires à l'Eifelien-Givetien résultait de l'existence, à leur voisinage, d'une faunule, considérée par Bresson comme coblentzienne (Pic de Yéous et de Nerbiou), et de leur ressemblance avec des faciès calcaires du Dévonien moyen. A cette assimilation s'opposent :

a. Un argument pétrographique. — En plusieurs points on rencontre, interstratifiés dans les calcaires, des grauwackes à Encrines qui, selon Bresson lui-même, ne se rencontrent que dans le Dévonien inférieur.

b. Des arguments géométriques. — La série calcaire est le plus souvent en contact avec le Gothlandien ou avec le socle de migmatites-granulites quand le Gothlandien est laminé (Pic du Midi, Merlheu, nord et sud du Col de Bareilles, ouest et sud du Lac Bleu, etc.). A l'est de la pelouse de Lagües, le Gothlandien pénètre même en anticlinal pincé dans les calcaires. Enfin, dans le ravin entre le Montaigu et le Pic de Lhens, ces calcaires dessinent une voûte anticlinale au-dessous du Coblentzien daté du Montaigu.

Si, malgré les arguments précédents, on continuait à attribuer cette série calcaire au Dévonien moyen, il faudrait admettre un renversement généralisé du Paléozoïque amenant constamment ce Dévonien moyen en contact avec le Gothlandien ou le socle, à l'exclusion du Dévonien supérieur ou du Houiller qui existent cependant dans le Massif. Un renversement d'une telle ampleur ne cadre d'ailleurs pas avec le style tectonique des régions avoisinantes.

La structure du Massif du Pic du Midi est, au reste, beaucoup plus complexe que ne le pensait Bresson.

Des plis plus ou moins cassants, orientés WNW-ESE, accidentent les migmatites. Sur une coupe NS de $2^{km},500$ passant à 200^{m} à l'ouest du Lac de Peyrelade, on observe au moins trois replis anticlinaux, dont le plus net, fracturé, passe par le Col de Choy.

Le massif des migmatites bute par faille contre la bande dévonienne qui le sépare du Massif de Conques-Lesponne; cette bande, bien qu'à peu près isoclinale, comprend plusieurs replis et écailles, parmi lesquels le prolongement pincé de l'anticlinal du Montaigu.

Du revers sud des migmatites de Peyrelade jusqu'au Houiller de Barèges,

(¹) *Bull. Carte Géol. France*, XIV, n° 93, 1903, et Feuille de Luz au 1/80 000ᵉ, 1905.

(²) P. Hupé, *Comptes rendus*, 224, 1947, p. 581.

on voit se développer, comme au Nord, un régime d'écailles ou de replis serrés, dessinant un dispositif en éventail ; on peut y distinguer trois faisceaux :

1° *Un faisceau septentrional*, déversé au Nord, situé entre les migmatites et un accident majeur qui, partant du Cap de Sencours (cote 2340), passe par la hourquette de Sencours, les à-pics nord du Som de Pène Blanque et du Merlheu, le Col de Bareilles, et va se cicatriser dans les pentes qui dominent le Lac d'Ourrec vers l'Ouest. Sauf à ses deux extrémités, l'accident est jalonné par du Gothlandien métamorphique injecté de granulite et de pegmatite. Les écailles du faisceau se développent vers les retombées ouest et est du bombement de migmatites, c'est-à-dire vers Ourrec et le Pic du Midi. Ce dernier est essentiellement formé de calcaires du Dévonien inférieur débités en une demi-douzaine de replis et d'écailles.

2° *Un faisceau moyen*, toujours déversé au Nord, compris entre l'accident majeur Sencours-Ourrec et la crête Pène Tailhade-Pène Pourry. On n'y compte pas moins de 7 écailles ou replis anticlinaux de calcaires du Dévonien inférieur, accompagnés ou non de Gothlandien, sur une coupe allant de la rive nord du Lac Bleu à Pène Tailhade.

3° *Un faisceau méridional*, situé au sud de la crête de Pène Tailhade et correspondant à l'extrémité Est de l'aire anticlinale gothlandienne de Pierrefitte définie par Bresson. Le déversement se fait ici au Sud et s'accentue de plus en plus vers Barèges, jusqu'à donner des pendages de 20 à 45° entre es Toucouets et Ourdegons. Le faisceau comprend 3 ou 4 écailles.

En résumé, au lieu de deux replis anticlinaux distingués par Bresson dans le Dévonien du revers sud des migmatites, on peut identifier 10 à 15 écailles sur une même coupe Nord-Sud de 3-4^{km} de long.

Des arguments décisifs manquent pour imputer cet écaillement, soit aux efforts hercyniens, soit aux poussées pyrénéennes. On peut cependant penser que les érosions qui se sont succédé depuis le Carbonifère supérieur jusqu'au Crétacé supérieur (rajeunies par des mouvements prémonitoires entre le Jurassique moyen et l'Aptien et pendant la fin du Crétacé), en sectionnant les têtes des plis hercyniens, ont favorisé, par des jeux différentiels, la dislocation de la série paléozoïque post-ordovicienne lors des paroxymes de la phase pyrénéenne.

TECTONIQUE. — *Sur la nappe, probablement précambrienne, de la Sioule, dans la partie nord-ouest du Massif Central.* Note de M. **André Demay**, présentée par M. Emmanuel de Margerie.

En 1934 et 1937, j'ai défini dans la partie nord-ouest du Massif Central un *socle antéhercynien, probablement précambrien.* M. J. Jung, en 1936, et, à sa suite, M. J. Richard, en 1938, ont envisagé, pour cette zone, un âge calédonien. Mais M. Jung a admis maintenant, lui aussi, dans sa *Géologie de l'Auvergne*, en 1946, un âge précambrien.

Dans ce domaine, entre le grand sillon houiller et la Limagne, à hauteur de Gannat, affleure, au nord du granite de Saint-Gervais et des tufs viséens de la Sioule, une série cristallophyllienne renversée, définie en 1938 par M. J. Richard (¹).

(¹) *Rev. Sciences nat. Auvergne*, 4, 1938, p. 1.

Sur bien des points, mes recherches récentes confirment ses conclusions. Entre la Bouble, Ayat et Saint-Pardoux, des paragneiss à biotite sont renversés sur des paragneiss à biotite et muscovite et ceux-ci sur des micaschistes.

Des plis secondaires, dôme des Colettes, synclinal de Saint-Gal-sur-Sioule, avec renversement tout autour du dôme et sur les deux bords du synclinal, permettent de constater qu'il ne s'agit pas d'une simple surface de chevauchement, mais de mouvements tangentiels et, de manière plus précise, d'une nappe en forme de pli couché, bien que M. J. Richard n'ait pas utilisé le mot de nappe. Je la désignerai sous le nom de *nappe de la Sioule*.

Par contre, mes conclusions s'écartent de celles de M. J. Richard sur trois points.

Dans la région de Teilhet, ce géologue a constaté que les paragneiss à biotite s'enfoncent sous les paragneiss à biotite et muscovite et occupent ainsi une position normale. Il attribue le fait à l'existence d'un pli-faille, qui aurait rétabli la position normale d'une série antérieurement renversée.

D'après mes observations, la plongée des paragneiss à biotite sous les paragneiss à biotite et muscovite de Teilhet est trop régulière pour qu'on puisse envisager un double renversement rétablissant la position normale. D'autre part, en suivant ce contact vers l'Est, j'ai observé près de Sacouty, entre Teilhet et Menat, des couches verticales, puis renversées, qui viennent rejoindre la série renversée de Menat.

L'interprétation la plus probable est qu'il s'agit d'un *pli couché à tête plongeante, que les couches redressées correspondent à une charnière anticlinale et qu'à l'Est, par suite d'une légère montée axiale, affleure le flanc inverse du pli. Si cette interprétation est exacte, le charriage a eu lieu vers le Sud.*

Quant au second point, la série renversée peut être observée vers l'Est jusqu'au granite de Champs, au sud-ouest de Gannat; mais au Sud, j'ai constaté que les micaschistes du flanc inverse reposent normalement sur des paragneiss à biotite et muscovite, puis sur les migmatites de Blot-l'Église. Ici apparaît donc le *substratum de la nappe de la Sioule*, partie supérieure d'un autre pli couché ou, plus vraisemblablement, terrain en place.

Le troisième point a trait au renversement des migmatites, de Lapeyrouse à Verneuil, sur les paragneiss à biotite renversés de la nappe de la Sioule. En accord avec les indications de M. J. Richard, j'ai bien observé, à l'est de Lapeyrouse, le renversement de migmatites nébulitiques sur des gneiss d'imprégnation granitique et sur des paragneiss à biotite, plus ou moins imprégnés. Mais les structures sont ici très redressées, 60 à 80° vers le Nord 20° Ouest. J'y ai observé des *replis aigus, avec absorption magmatique syntectonique*. Les conditions sont toutes différentes de celles que l'on constate dans les parties couchées de la nappe. Il me semble presque certain qu'il s'agit ici de la *zone d'enracinement de la nappe de la Sioule*. S'il en est ainsi, le cheminement de la nappe a eu lieu vers le SSE, ce qui s'accorde avec l'hypothèse formulée

plus haut, d'une charnière frontale, au sud-ouest de Menat, et d'un substratum normal, près de Blot-l'Église.

Les observations que j'ai faites au nord et au sud de la zone renversée confirment cette interprétation. Au Sud, les micaschistes d'Ayat qui appartiennent au flanc inverse ou au substratum de la nappe, sont probablement liés aux micaschistes de Saint-Georges et des Ancizes, qui plongent vers le Nord et reposent sur les migmatites de l'anticlinal de la Goutelle. D'une manière plus générale, j'ai constaté que *la répartition du degré métamorphique dans le Cristallophyllien est normale à la latitude de Clermont et plus au Sud.*

Du côté nord, j'ai vérifié que la répartition du degré métamorphique est également normale. Entre Montaigut et Montluçon, dans des migmatites souvent redressées, rien n'indique un renversement. Entre Montluçon et Moulins, près de Chavenon, j'ai observé une série normale, à plongée d'environ 30° vers l'WSW, granite, migmatite granitique, paragneiss à biotite compact, paragneiss à biotite très schisteux.

On peut donc conclure que le *renversement du Cristallophyllien existe seulement dans une zone assez limitée, qu'il correspond au charriage d'une nappe en forme de pli couché, enracinée au nord de la Bouble et qui a déferlé d'environ* 20^{km} *vers le SSE et présente probablement une tête plongeante dans la région de Teilhet.*

Ainsi se trouve mise en évidence une nappe, probablement précambrienne, dont les parties couchées sont conservées et affectées seulement par de larges ondulations; et dont la structure est analogue à celle des nappes alpines du Tessin. Aucune structure de ce type n'a été décrite, à ma connaissance, dans une chaîne précambrienne. La nappe du Gier et la nappe de la Margeride sont probablement plus jeunes et, dans les chaînes précambriennes de Finlande, apparaissent seulement des racines de nappes ou des nappes fortement replissées, dont les parties couchées ne sont plus reconnaissables, et, dans un seul cas, d'après H. Väyrinen, une nappe, celle d'Outokumpu, d'allure onduleuse, mais qui n'a pas l'aspect d'un pli couché.

MÉTÉOROLOGIE. — *Sur la coalescence électrique des brouillards et éventuellement des nuages à température quelconque au moyen d'aérosols électrisés.* Note (¹) de M. **Marcel Pauthenier**, présentée par M. Aimé Cotton.

Nous avons montré (²) qu'une particule électrisée de rayon R chargée dans un champ ionisé E_0, qui tombe dans un brouillard de gouttelettes de rayon moyen r, balaie électriquement les gouttelettes contenues dans un cylindre de rayon ρ en général notablement plus grand que R. Le gain dû à l'électrisation

(¹) Séance du 9 février 1948.
(²) *Comptes rendus*, **224**, 1947, p. 142-144.

est donné par la formule

$$y = \frac{\pi\rho'^2}{\pi R^2} = \left(\frac{18p'E_0^2 r^6}{\pi\mu g}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{R}$$

(pour la silice $p = 2$, $\mu = 5/2$); y est de plusieurs unités, de 10 à 20 dans les cas les plus favorables; nous avons donc ajouté que *le gain n'est pas tel que l'on ne doive serrer de près les difficultés*. Nous avons fait un premier groupe de recherches qui confirme ces prévisions.

Réalisation d'une tour à brouillard. — La section de la tour est environ 4×4^m, la hauteur 6^m. A 1^m du sol, un faisceau lumineux d'intensité constante I_0 pénètre dans la tour; sur la paroi opposée, à la distance l, une cellule reçoit l'intensité $I = I_0 e^{-\sigma l}$; σ varie en fonction du temps pendant l'évolution naturelle du brouillard. *La visibilité est* $V = K/\sigma$ ($K = \text{const.}$).

Production du brouillard. — En haut de la tour sont montés trois pulvérisateurs industriels à jet horizontal qui fonctionnent pendant 4 minutes, produisant un brouillard épais (environ 3 g/m^3), lequel évolue en fonction du temps. En cette saison du moins, quand les parois de la tour sont humidifiées, cette évolution a été trouvée toujours la même. Nos brouillards sont donc reproductibles. On envoie l'aérosol électrisé 2 minutes après l'arrêt des pulvérisateurs. Au droit du faisceau lumineux, les gouttelettes les plus fréquentes ont alors 14 à 15^μ de diamètre.

Expériences de précipitation. — A. L'aérosol contient *des particules de silice* électrisées de 15 à 48^μ de diamètre moyen, donc trop grosses (une bonne valeur du diamètre serait 20^μ), de formes très irrégulières, donc se chargeant mal. Malgré cela, nous avons obtenu déjà des résultats intéressants. Nous ne les publierons pas maintenant pour deux raisons. D'une part, notre mode de projection de l'aérosol est défectueux en vase clos, les particules électrisées se collent au sommet de la tour : on n'en retrouve qu'une faible fraction en bas. D'autre part, nous savons faire maintenant des sphérules de verre égales et de rayon quelconque; nous attendons que l'appareil soit construit pour continuer ces recherches.

B. *L'aérosol contient des gouttelettes d'eau électrisées* (50 à 100^μ de diamètre). — Ces gouttelettes sont encore trop grosses; mais leur charge électrique et leur distribution sont beaucoup plus faciles que dans le cas A.

La courbe I de la figure ci-jointe donne la variation de la visibilité en fonction du temps dans le cas de l'évolution naturelle du brouillard.

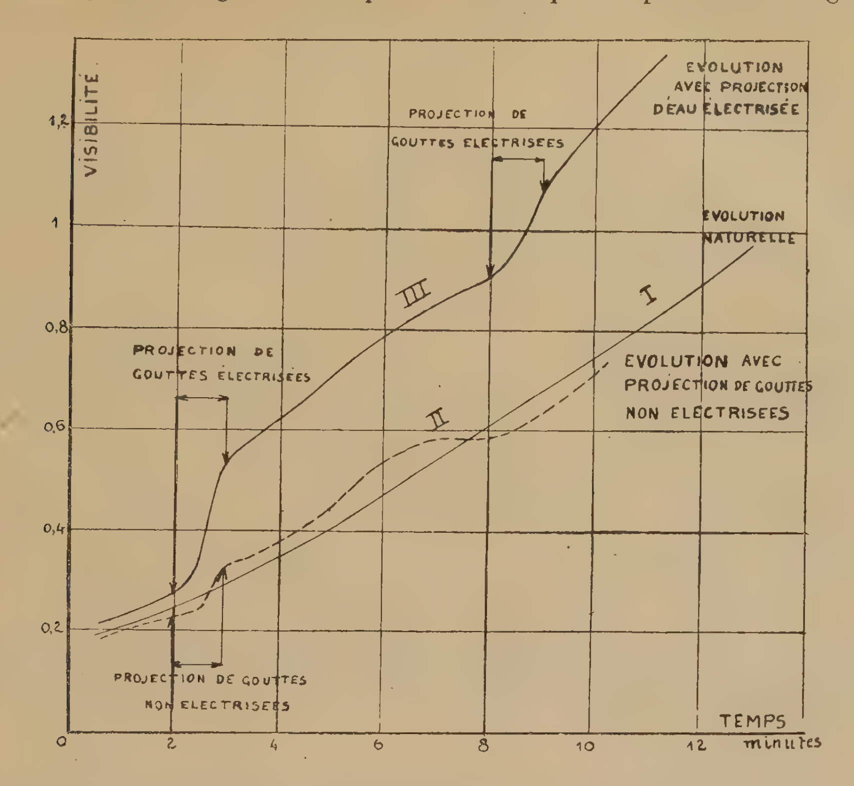
La courbe II correspond à la pulvérisation d'une certaine masse d'eau non électrisée, son effet est insignifiant.

La courbe III correspond à la pulvérisation de la *même masse* chargée dans un champ électrique ionisé.

Ces résultats préliminaires sont assez frappants.

Application à la coalescence des nuages et éventuellement à la production de

pluie artificielle. — On sait que le procédé de déclenchement de la précipitation des nuages par la neige carbonique nécessite qu'une partie du nuage soit en



surfusion, c'est-à-dire située au-dessus de l'isotherme 0° C. Ici nous ne trouvons aucune condition de température.

Récemment un communiqué de presse a parlé d'essais (à $t > 0°$ C.) au moyen de gouttes d'eau liquide non chargées électriquement. Nos essais montrent que la méthode B des gouttelettes électrisées serait beaucoup plus efficace, d'autant plus que les effets constatés seraient beaucoup plus marqués dans un nuage de grande épaisseur que dans une tour de quelques mètres de hauteur utile.

PHYSIQUE ATMOSPHÉRIQUE. — *Sur la formation artificielle de la pluie.* Note (¹) de MM. **Edmond Brun** et **Lucien Demon**, présentée par M. Gustave Ribaud.

De nouveaux essais, effectués dans des conditions déjà relatées (²), ont montré que, conformément à ce que l'on pouvait prévoir, plus l'anhydride carbonique solide est à l'état divisé, plus est faible la masse de ce corps nécessaire pour

(¹) Séance du 9 février 1948.

(²) Voir E. Brun et L. Demon, *Comptes rendus*, 225, 1947, p. 505 et 953.

provoquer la précipitation d'un volume déterminé de nuage d'eau surfondue et plus est grande la vitesse avec laquelle disparaît le nuage. Ainsi, le rendement de l'opération est considérablement augmenté si l'on utilise, au lieu de morceaux de carboglace, des flocons de neige carbonique.

Jusqu'ici, devant la difficulté de voler dans un nuage d'eau surfondue (donc givrant), la méthode préconisée consistait à lâcher, d'un avion survolant le nuage, des boules d'anhydride carbonique solide ou des morceaux de carboglace. La neige carbonique n'a pas été employée, car les flocons, par suite de leur sublimation rapide, n'auraient pas atteint le nuage.

Cependant, une solution simple consiste à placer la neige carbonique dans des capsules que l'on fait exploser dans les parties hautes du nuage. Ces capsules peuvent être lâchées d'un avion ou envoyées du sol. Nos essais ont montré que la dispersion de la neige carbonique peut être excellente et que la disparition du brouillard est presque instantanée avec une faible masse de produit (quelques milligrammes pour notre cuve de 6^{m^3}).

Un résultat analogue est obtenu en dispersant, au sein du brouillard, une poudre fine préalablement refroidie à une température inférieure à —40°C environ.

A noter que, d'une part, l'explosion de la cartouche, d'autre part, la dispersion de la même poudre non refroidie, ne produisent, dans les mêmes conditions, aucun effet appréciable ([3]).

EMBRYOGÉNIE VÉGÉTALE. — *Embryogénie des Papilionacées. Développement de l'embryon chez le* Lens esculenta *Moench* (Ervum Lens *L.*, Orobus Lens *Stokes*, Vicia Lens *Coss. et G. de St. P.*). Note ([1]) de M. **Pierre Crété**, présentée par M. René Souèges.

Les représentants des genres *Vicia*, *Lathyrus*, *Ervum* et *Orobus* sont si proches les uns des autres par les caractères tirés de leur morphologie externe, qu'il règne une grande confusion au sujet de leur classification. Des recherches embryogéniques récentes ([2]) ([3]), ont permis, d'ores et déjà, d'apporter une contribution importante à la solution de ce problème. Dans tous les cas, les blastomères se disposent d'abord en une tétrade première, linéaire-globuleuse. L'étage inférieur bicellulaire *cb* est destiné à fournir la partie la plus volumineuse du suspenseur et les éléments issus de la cellule apicale *ca*

([3]) Toutefois, certaines poudres étudiées déjà à la *General Electric Company* n'ont pas besoin d'être refroidies pour produire l'amorçage de la précipitation. Malheureusement, ces poudres sont d'un prix élevé (iodure d'argent, par exemple).

([1]) Séance du 2 février 1948.

([2]) R. Souèges, *Comptes rendus*, 223, 1946, p. 60, 389 et 838.

([3]) P. Crété, *Comptes rendus*, 223, 1946, p. 921.

interviennent, à la fois, dans la construction du corps de l'embryon et dans l'édification de la portion supérieure du suspenseur. C'est seulement quand une tétrade seconde s'est développée aux dépens de la cellule apicale que commencent à se préciser les différences qui permettent de caractériser certains genres (⁴).

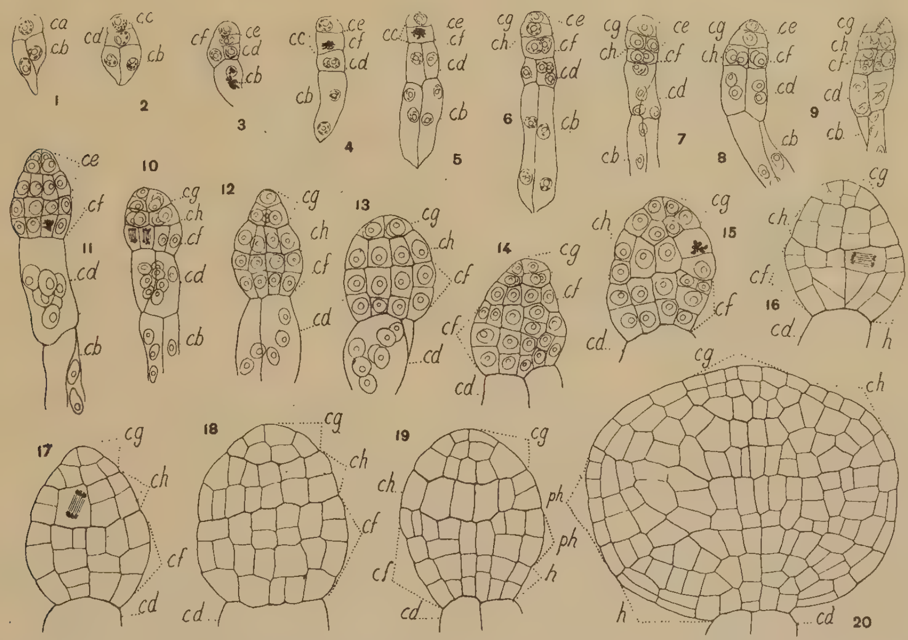


Fig. 1 à 20. — *Lens esculenta* Moench. — Les principaux termes du développement de l'embryon. *ca*, cellule apicale du proembryon bicellulaire; *cd* et *cb*, cellule-fille inférieure de *ca* et cellule basale, ou les deux paires de vésicules haustoriales; *cc*, cellule-fille supérieure de *ca* ou cellule embryonnaire proprement dite; *ce*, cellule-fille supérieure de *cc* ou partie cotylée *sensu lato*; *ci*, cellule-fille inférieure de *cc*; *cg*, cellule-fille supérieure de *ce* ou épiphyse; *ch*, cellule-fille inférieure de *ce* ou partie cotylée proprement dite; *ph*, partie hypocotylée; *h*, assise génératrice du groupe hypophysaire. G = 300 pour les figures 1 à 19; 220 pour la figure 20.

Chez le *Lens esculenta*, la tétrade première (*fig.* 2) et la tétrade seconde (*fig.* 3) sont toutes deux du type linéaire globuleux. Leurs étages inférieurs, *cb* dans le premier cas, *cd* dans le second cas, sont destinés à fournir respectivement la partie inférieure et la partie supérieure du suspenseur; ce dernier ne comprend, jusqu'à la fin, que ces deux groupes de deux cellules, où les noyaux se divisent un certain nombre de fois, tout en augmentant de volume. A partir des éléments supérieurs *ce* et *cf* de la tétrade seconde, il s'édifie un nouveau quartet, comprenant l'étage *cf*, devenu bicellulaire, et, provenant de la cellule *ce qui prend une cloison nettement transversale*, deux nouveaux étages, *cg* et *ch* (*fig.* 6).

La cellule *cg* est l'origine de l'épicotyle, et, de la cellule *ch*, dérive la partie cotylée *sensu stricto*. Les deux cellules de l'étage *cf* se divisent d'abord en quatre éléments (*fig.* 8). Ceux-ci donnent naissance à deux étages *ph* et *h*, soit directement par leur cloisonnement horizontal (*fig.* 9), soit après une nouvelle série de divisions verticales, suivies, au niveau

(⁴) R. Souèges, *Comptes rendus*, 224, 1947, p. 1599.

des cellules-filles, de la formation de parois transversales (*fig.* 10). Les étages *ph* et *h* constituent les assises génératrices de la partie hypocotylée et de la zone hypophysaire (*fig.* 20).

Se séparant radicalement de celle des *Vicia*, la tétrade seconde du *Lens esculenta* appartient à la catégorie C_1 de la sous-série C, comme celle des *Ervum* et des *Orobus*. Seulement, à un stade ultérieur, le cloisonnement horizontal de la cellule *ce*, qui assure une différenciation beaucoup plus précoce de l'épiphyse, sépare la Lentille des deux autres genres avec non moins de netteté. Le mode de cloisonnement de *ce* fait du genre *Lens* un type embryonomique nouveau, répondant au mégarchétype VI dans le 15e groupe embryogénique de la classification périodique. En conséquence, il y a tout lieu de maintenir le genre *Lens* et de ne pas l'inclure dans les genres *Ervum*, *Orobus* ou *Vicia*.

On voit encore, par ces observations, que la classification périodique, qui permet de définir de manière si précise les différences fondamentales entre types embryonomiques, constitue vraiment un excellent outil de travail.

MYCOLOGIE. — *Les diverses pigmentations du mycélium végétatif de* Tuber melanosporum *Vitt. cultivé* in vitro. Note (1) de Mlle **Marie-Louise Bouillet**, présentée par M. Joseph Magrou.

Le pigment noir qui teinte l'appareil végétatif de *Tuber melanosporum* cultivé *in vitro* (2), est identique à celui qui caractérise la majeure partie des hyphes du périthèce. La température et la lumière ne paraissent jouer aucun rôle dans sa formation, mais l'atmosphère confinée la ralentit considérablement. Ce pigment est insoluble dans les solvants organiques et dans les acides, mais lentement soluble dans un mélange de KOH et de NH_4OH concentré. Sa décoloration peut être obtenue en traitant par les oxydants. Ces réactions principales, dont certaines sont voisines de celles qui caractérisent les mélanines, ne sont toutefois pas assez précises pour nous fixer sur la nature du pigment noir.

Si l'on cultive dans les conditions ci-indiquées, on voit apparaître une coloration rouge plus ou moins intense, parfois réduite à un simple reflet rougeâtre. Microscopiquement de tels filaments sont recouverts par des amas rouges biréfringents, et les hyphes de diamètre réduit, un à deux microns, sont entourés d'un manchon rouge plus ou moins homogène (*fig.*). Ce pigment se forme plus facilement en milieu gélosé qu'en milieu liquide; sa production serait donc liée, en particulier, à l'état d'hydratation. Les substratums les plus favorables sont les suivants : bouillons gélosés de pois chiches ou de carottes, solutions gélosées de Maltea Moser à 4 % additionnées de 1 % de $(NO_3)^2Ca$.

(1) Séance du 2 février 1948.

(2) Souche du laboratoire de Botanique de la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand.

La production est moins intense en présence de NO_3K ou de NO_3Na; elle est nulle avec NO_3NH_4 ainsi qu'avec les sulfates de Ca, de Zn et de Mg. La température est sans influence, la lumière est favorable, l'atmosphère confinée inhibe sa parution. Au point de vue chimique, le pigment rouge est insoluble dans



l'eau froide ou chaude. Il donne des solutions rouges ou orangées avec C_2H_5OH, $(CH_3)^2CO$, C_6H_6, $(C_2H_5)_2O$, $CHCl_3$, l'éther de pétrole, HCO_2H, CH_3COOH, et quand il est assez abondant, une solution bleue avec NH_4OH; les bases ($NaOH$, KOH), les acides minéraux (SO_4H_2, HCl, NO_3H) et l'acide lactique sont de très mauvais solvants. Les alcalis provoquent un virage au bleu réversible au voisinage de la neutralité. Le pigment est très résistant aux oxydants. La pigmentation qui vire parfois au violet dans les cultures âgées est donc un indice d'une alcalinisation. En évaporant sur lamelle, l'examen microscopique décèle la présence de cristaux rouges en aiguilles inclus dans des gouttelettes graisseuses.

On est donc en présence d'un corps se rapprochant des caroténoïdes par ses caractères de solubilité et par sa coloration bleue sous l'action de SO_4H_2 concentré; mais il s'en éloigne par son virage réversible avec les alcalis, par sa grande résistance aux oxydants et par le fait qu'il ne réagit pas sous l'action de la solution de lugol. Sa présence sous forme de cristaux à l'extérieur des hyphes permet de le considérer comme un déchet de l'activité cellulaire qui ne se formerait que dans des conditions anormales, soit au point de vue physique (lumière), soit au point de vue chimique (milieu déséquilibré).

Enfin, dans certains milieux trop riches en azote, tels que les solutions de peptone à concentration supérieure à 4 %, le Maltea Moser à 4 % additionné de 1 % de NO_3NH_4, il se forme un pigment brun qui diffuse dans le milieu de culture. Seul l'azote organique ou ammoniacal agit, car si l'on introduit la même quantité d'azote d'une part sous forme de NO_3NH_4, d'autre part sous forme de $(NO_3)^2Ca$, la diffusion pigmentaire n'apparaît que dans le premier cas. On l'obtient aussi en présence d'un excès de certains ions métalliques tels

que le Zn^{++}. L'apparition d'un tel pigment coïncidant généralement avec un mycélium à développement limité, constitué par des cellules globuleuses et vésiculées, il semble que son élaboration soit un indice de toxicité du milieu. Il est favorisé par une élévation de la température, la lumière est sans influence, la coloration n'apparaît pas en atmosphère confinée.

En résumé, dans les conditions où nous l'avons étudié, le mycélium végétatif de la truffe a élaboré trois substances colorées : un pigment noir membranaire qui se trouve également dans le périthèce et que l'on peut considérer comme la formation normale du Champignon; un pigment rouge insoluble dans l'eau, voisin des caroténoïdes, apparaissant principalement à la lumière ou dans les milieux riches en nitrates alcalins et alcalino-terreux; enfin un pigment brun hydrosoluble, indice de la toxicité du milieu.

PATHOLOGIE VÉGÉTALE. — *Virus et culture de tissus de Tabac et de Tomate.* Note de M. **Gabriel Segretain**, présentée par M. Joseph Magrou.

Dans une Note publiée en 1943 [1] nous avions observé le développement du virus de la mosaïque du Tabac dans les néoformations obtenues à partir de fragments de tiges de Tabac mosaïqué, mis en culture sur le milieu convenable d'après la méthode préconisée par M. Gautheret, et nous signalions la possibilité d'inoculer des tiges saines après leur mise en culture. Après interruption du fait de la guerre, nous avons repris ces recherches sur le Tabac (*Nicotiana Tabacum*, var. P. 19) et la Tomate (*Lycopersicum esculentum*).

Cherchant à obtenir des cultures de tissus sains ou atteints de mosaïque, nous avons précisé l'action des auxines sur la production de racines par les tissus de ces plantes. En présence de doses croissantes d'acide indole-β-acétique, des fragments de Tabacs sains et mosaïqués, mis en culture, forment de nombreuses racines si la dose de substance excito-formatrice est égale ou supérieure à 4×10^{-8}; pour une concentration égale ou inférieure à 10^{-8}, il n'y a pas néoformations de racines. L'acide naphtalène-acétique a une action analogue. Nous retrouvons ainsi avec le Tabac des résultats obtenus par M. Gautheret [2]. Avec la Tomate, le nombre des racines obtenues par action de l'acide indole-β-acétique varie suivant les pieds sur lesquels les fragments de tige ont été prélevés; nous pensons qu'il existe des différences individuelles en contenu auxinique de cette plante. Nous adressant à des pieds sains et à des pieds inoculés avec le virus de la mosaïque du Tabac, nous n'avons pu déceler, par ce procédé, de modifications du contenu auxinique en rapport avec la présence du virus.

---

(1) *Ann. Inst. Past.*, 69, 1943, p. 61.

(2) *C. R. Soc. Biol.*, 130, 1929, p. 7.

Nous avons cherché si le virus se développait dans les tissus néoformés à partir de fragments de tige de Tabac et de Tomate mis en culture et dans les repiquages. Après prélèvement des tissus néoformés, broyage au mortier de ces tissus, extraction et centrifugation du jus, le contenu en virus de ce jus a été éprouvé par inoculation à *Nicotiana glutinosa*, suivant la méthode dite du *carré latin* ([3]), en comparant les jus éprouvés à des jus témoins extraits de feuilles de Tabac inoculé depuis environ deux mois. Ce mode d'inoculation permet de comparer entre eux la virulence des différents jus par application des méthodes statistiques.

Sur Tomate, après deux mois de culture, les jus extraits des néoformations se sont montrés nettement moins virulents que les témoins. Mais ensuite, sur certains fragments de tige conservés sans repiquage, et sur d'autres ayant pu subir jusqu'à deux repiquages, et dont la prolifération était cependant lente, des titrages faits sept à huit mois après mise en culture, ont montré que la concentration en virus des jus extraits des cultures était la même que celle du jus témoin. Des repiquages qui étaient encore vivants onze mois après leur mise en culture, ont donné des jus dont l'inoculation à cinq feuilles de *Nicotiana glutinosa* a provoqué la formation de lésions dont les nombres sont consignés dans le tableau ci-joint (*a*) et sont tout à fait du même ordre que ceux donnés par le jus témoin. Sur Tabac, nous avons obtenu des résultats analogues : après deux repiquages, sur des cultures conservées vivantes, douze et treize mois après leur mise en culture, le nombre des lésions obtenues par inoculation à *N. glutinosa* est du même ordre que celui du témoin (tableau, *b*).

TABLEAU

(*partie d'une expérience comportant l'inoculation de* 5 *jus différents aux* 5 *feuilles portées par chacun des* 5 *tabacs*).

	Nombre de lésions obtenues par feuille (5 pieds de *Nicotiana glutinosa*).					Totaux des nombres de lésions.
	1er pied.	2e pied.	3e pied.	4e pied.	5e pied.	
Jus témoin	90	102	52	26	123	393
a. Jus de Tomate	80	60	65	62	133	400
b. » Tabac	90	52	72	34	131	379

Les totaux des nombres de lésions sont très voisins les uns des autres et la comparaison de ces séries de chiffres montre que ces séries doivent être identifiées; la concentration en virus de chacun de ces jus est donc la même.

Il nous semble donc probable que le virus de la mosaïque du Tabac puisse se développer en culture de tissu de Tabac et de Tomate sans rien perdre de sa virulence.

([3]) YOUDEN et BEALE, *Contrib. Boyce Thomson Inst.*, 9, 1934, p. 41.

ANATOMIE COMPARÉE. — *Sur l'origine des Chevaux* (Equus caballus *L.*) *du Pléistocène d'Europe*. Note de Mlle **Madeleine Friant**, présentée par M. Émile Roubaud.

En Europe, les Chevaux furent abondants au Pléistocène, à certaines périodes surtout. On les désigne sous deux noms : *Equus Stenonis* Cocchi et *Equus caballus* L., qui représentent, peut-être, des groupes plutôt que des espèces. L'*Equus Stenonis* apparaît en Europe dès la base du Quaternaire (E. Haug) et s'éteint avec la glaciation de Riss, sauf dans le nord de la France et en Allemagne, où on le rencontre jusqu'à l'avènement de la glaciation de Würm. L'*Equus caballus*, qui fait son apparition au Rissien (1), vécut dans nos régions jusqu'à la fin du Pléistocène. De ces deux groupes de Chevaux, nous savons peu de choses, sinon qu'ils sont très polymorphes.

La présente Note, destinée à préciser les affinités de l'*Equus caballus* fossile,

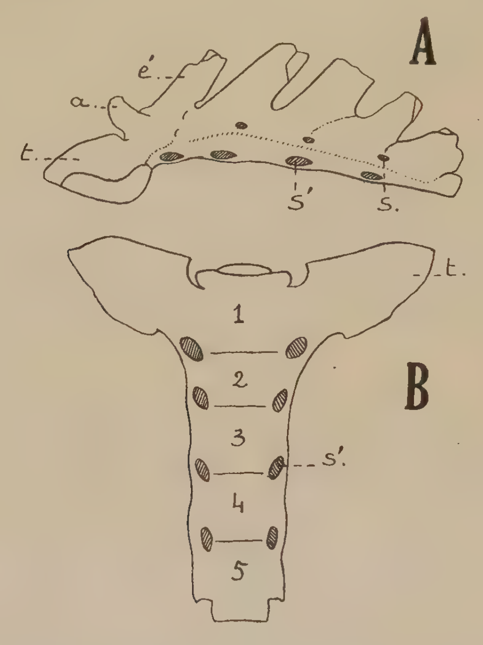


Schéma du sacrum d'*Equus* (adulte encore jeune) trouvé dans les alluvions anciennes de la Loire, à Saint-Jean-de-Boiseau (Loire-Inférieure). Coll. de M. Brochard. En **A**, vue latérale gauche. — En **B**, vue inférieure. — *a*, apophyse articulaire ; *é*, apophyse épineuse (brisée); *t*, apophyse transversale de la 1re vertèbre sacrée; *s*, trou sacré (sus-sacré); *s'*, trou sacré (sous-sacré); 1, 2, 3, 4, 5, corps des 1re, 2e, 3e, 4e et 5e vertèbres sacrées. G. N. × 1/4.

se rapporte à un sacrum d'Equidé trouvé par M. Brochard, à Saint-Jean-de-Boiseau (Loire-Inférieure), dans les alluvions anciennes de la Loire (jusqu'à 35 mètres) d'âge rissien ou chelléen.

(1) Bien que A. T. Hopwood (1936) pense que l'*Equus Stenonis* et l'*Equus caballus* ont, tous deux, vécu en Europe à partir du Villafranchien, je partage, ici, l'opinion de H. G. Stehlin (1933) quant à la répartition, dans le temps, des *Equus* fossiles d'Europe.

J'ai comparé cet os (*fig.* 1), en assez bon état de conservation (à l'exception des apophyses épineuses qui sont brisées), avec le sacrum des Équidés actuels, sauvages et domestiques, des Collections du Muséum. De cette étude, qui paraîtra ultérieurement en détail, il résulte que le sacrum de Saint-Jean-de-Boiseau est très proche de celui du Cheval de Przewalski (sauvage dans le centre de l'Asie), notamment par sa taille, la grande obliquité, vers l'arrière, de ses apophyses épineuses, et, surtout, la forme des apophyses transverses (ailerons) de sa première vertèbre sacrée, très étroites, qui rappellent les apophyses transverses des vertèbres lombaires. Cette exiguïté des ailerons sacrés est, il est vrai, plus marquée chez le Cheval de Przewalski, qui s'affirme ainsi, plus primitif encore que notre fossile. Par contre, chez les Chevaux domestiques, et surtout les Zèbres (*Hippotigris*) (²), les Hémiones et les Anes (*Asinus*), le sacrum présente des ailerons beaucoup plus larges que ceux du Cheval quaternaire, qui deviennent même arrondis dans le groupe de l'*Hippotigris* et celui de l'*Asinus*.

Ce document nouveau montre donc que, chez les Equidés, l'évolution de la région sacrée paraît s'être poursuivie par le développement des apophyses latérales de la première vertèbre, qui, étroites chez le Cheval de Przewalski, s'élargissent un peu, chez notre Cheval fossile, davantage chez les Chevaux domestiques et, principalement, chez les Zèbres et les Anes, le bassin prenant, de ce fait, une extension de plus en plus considérable (³).

En somme, si l'on en juge d'après l'exemplaire de Saint-Jean-de-Boiseau, certains Chevaux du Quaternaire inférieur de nos régions, quoique un peu plus robustes et un peu plus évolués que le Cheval de Przewalski, en étaient très proches : venus de l'Asie, ces *Equus sensu stricto* dérivaient, sans aucun doute, de la même souche ancestrale que lui. L'âge et le lieu de notre gisement (⁴) semblent indiquer qu'il s'agit là d'*Equus* du groupe *caballus sensu lato* (comprenant aussi, comme l'admet E. L. Trouessart, l'*Equus Przewalskii*).

ZOOLOGIE. — *Structure et transformations gravidiques du tractus génital femelle chez un Anoure vivipare* (Nectophrynoïdes occidentalis Angel). Note (¹) de MM. **Maxime Lamotte** et **Herbert Tuchmann-Duplessis**, présentée par M. Maurice Caullery.

La viviparité vraie ne se rencontre chez les Anoures que dans le genre

---

(²) Pour les subdivisions du genre *Equus*, j'adopte la nomenclature de E. L. Trouessart, en raison de sa simplicité.

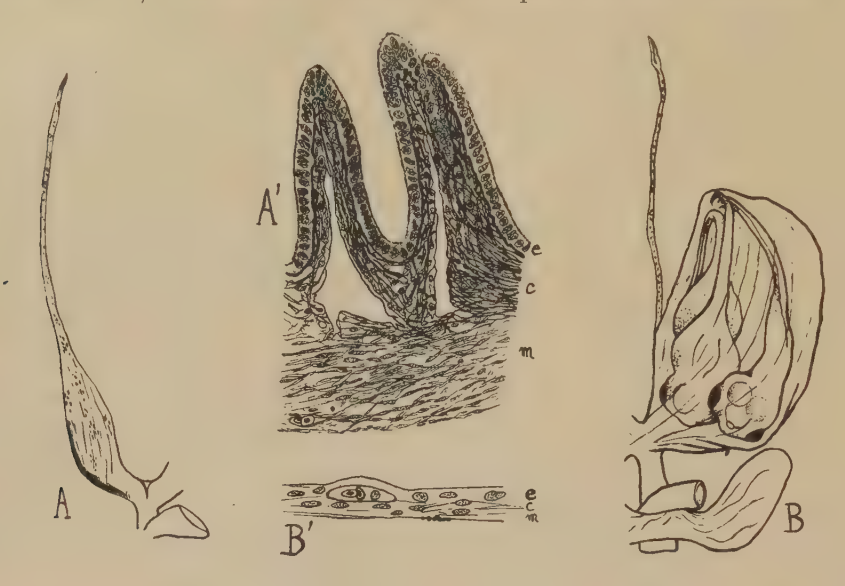
(³) Ici, le sexe ne semble pas jouer de rôle dans la forme du sacrum.

(⁴) La taille des ossements n'est pas un critère de valeur, car il a existé de grands *Equus Stenonis* (var. *major*) qui, par leurs dimensions, se rapprochaient de certains *Equus caballus* fossiles.

(¹) Séance du 2 février 1948.

africain *Nectophrynoïdes*, notamment dans l'espèce *N. occidentalis*, localisée au Mont Nimba (Guinée).

Le tractus génital apparaît chez la femelle vierge (20-22^{mm} du museau à l'anus), sous l'aspect de deux conduits à peu près rectilignes, réunis à leur extrémité distale; chacun est formé de deux parties bien distinctes (*fig.* A).



La partie antérieure, longue de 7-10^{mm}, à section circulaire et étroite ($0^{mm},2$), constitue l'*oviducte* proprement dit; elle présente un épithélium cubique limitant une étroite lumière festonnée et reposant sur un mince chorion conjonctif que limite extérieurement une fine couche musculaire lisse. La partie postérieure, au contraire, est élargie et forme une poche aplatie, à parois épaisses, longue de 3-4^{mm} et large de 2^{mm}, très caractéristique du genre *Nectophrynoïdes*. Nettement individualisée, tant au point de vue morphologique qu'au point de vue fonctionnel, elle abrite les embryons pendant tout leur développement et mérite en conséquence d'être appelée *utérus*.

Cet utérus (*fig.* A') offre un épithélium cylindrique cilié *e*, reposant sur un chorion conjonctif épais *c*, dont les nombreux replis donnent à la lumière un aspect festonné, et qui s'étale à la périphérie, au contact d'une couche musculaire lisse *m* à disposition circulaire. Richement vascularisé, ce chorion est épaissi au contact de la basale, tandis que sa partie médiane constitue un feutrage plus lâche.

Les cellules épithéliales, toutes du même type, correspondent aux cellules de soutien de l'oviducte des Batraciens ovipares et l'on n'y trouve pas, contrairement à la structure habituelle, de cellules muqueuses caliciformes. Par cette absence, l'utérus du *Nectophrynoïdes* rappelle l'aspect du canal de Müller du Triton hypophysectomisé, dont les cellules muqueuses disparaissent, en même temps que se produit la régression ovarienne et l'arrêt de la ponte; leur absence,

chez *Nectophrynoïdes*, semble également en rapport avec l'absence de gangue muqueuse autour des œufs, ceux-ci n'étant pas pondus à l'extérieur et restant dans l'utérus.

Chez la femelle gravide, l'oviducte reste grêle et inchangé. La portion utérine au contraire, distendue par les embryons en croissance, se dilate démesurément et occupe progressivement une grande partie de l'abdomen (*fig.* B). A travers la paroi très amincie (30^{μ}), on distingue les embryons, au nombre de 1 à 10 par poche utérine. Des examens en coupes sériées montrent qu'aucune liaison n'existe entre la paroi utérine et les embryons; aucun indice ne rappelle donc une placentation, même rudimentaire, et les embryons baignent simplement dans un liquide avec lequel se font les échanges respiratoires et nutritifs.

Si, à première vue, la structure de la paroi de l'utérus gravide paraît profondément transformée (*fig.* B′), un examen plus attentif montre que les diverses couches cellulaires décrites ci-dessus subsistent, mais excessivement étirées et aplaties. Tandis que l'épithélium *e* et le chorion *c* se déplissent, puis s'aplatissent progressivement, l'enveloppe musculaire lisse *m* s'étire démesurément en se plaquant contre le chorion, à mesure que les embryons distendent le sac utérin. La paroi musculaire du corps, étroitement appliquée contre l'utérus, lui assure la solidité nécessaire et supplée à sa musculature propre insuffisante. L'épithélium, devenu endothéliforme, repose finalement sur un chorion très aminci formé de fibres conjonctives, entremêlées de quelques fibres musculaires lisses. La vascularisation capillaire est intense, en relation évidente avec les besoins importants des embryons.

Le tractus génital femelle de *Nectophrynoïdes* est donc remarquable par sa différenciation en deux parties distinctes ayant respectivement la valeur d'un oviducte et d'un utérus, et par la structure de ce dernier, très richement vascularisé, sans glandes muqueuses et susceptible d'une dilatation considérable.

Bien que réduit à une simple poche et paraissant n'offrir qu'une adaptation rudimentaire, cet utérus n'en permet pas moins, comme chez les Mammifères, un développement vivipare complet, aboutissant à la naissance de jeunes totalement métamorphosés.

ENTOMOLOGIE. — *Sur la morphologie thoracique des insectes Zoraptères.* Note de M. **Claude Delamare Deboutteville**, présentée par M. Louis Fage.

Depuis leur découverte en 1913 par Silvestri, la morphologie des Zoraptères n'a été étudiée que par Crampton (1920). Cet auteur a brièvement décrit le thorax des adultes ailés du *Zorotypus Hubbardi* Caudell. L'étude d'une abondante collection de *Z. guineensis* Silv. de la Côte d'Ivoire m'a permis de mieux comprendre la structure de leurs pleurites et de leurs sternites.

On sait que les adultes des Zoraptères peuvent être aptères ou ailés. Les adultes ailés perdent d'ailleurs leurs ailes par un processus analogue à celui que l'on observe chez les Termites.

Chez les adultes aptères les pleures métathoraciques sont constituées par un épimère et un épisterne bien développés surplombant deux petites pièces : le katépimère et le katépisterne. La crête pleurale s'étend jusqu'à l'articulation coxale sans présenter de bifurcation secondaire. Le latéropleurite, figuré par Crampton chez les adultes ailés, est ici complètement soudé à l'épisterne et au latérosternite. La structure est essentiellement la même au mésothorax, mais le katépisterne n'existe plus et la crête pleurale se bifurque secondairement pour entourer complètement le katépimère. Au prothorax, cette bifurcation secondaire de la crête pleurale gagne en importance, alors que le trajet normal de celle-ci n'est plus marqué que par une faible ligne chitinisée. Le latéropleurite prothoracique est lui-même très bien individualisé.

Tandis que le sternite du métathorax est constitué par une seule pièce en continuité avec les latérosternites et portant à l'arrière les insertions furcales, le mésothorax présente une mince zone médiane (*intersternellum* de Fuller) flanqué de deux bandes (*juxtasternella* de Fuller). Au prothorax, le sternite est faiblement séparé des latérosternites, tandis que l'*intersternellum* et les *juxtasternella* sont très grêles.

Le prothorax des adultes ailés est identique à celui des adultes aptères, tandis que les deux segments suivants se trouvent légèrement modifiés par la présence des ailes. Le prothorax est principalement caractérisé par une plus grande individualité des sclérites, le latéropleurite étant séparé de l'épisterne par une membrane partielle et le latérosternite du latéropleurite ainsi que du sternite par de fines membranes. Le latéropleurite du Zoraptère ailé est donc mieux individualisé que celui du Termite ailé chez lequel on ne constate jamais l'existence d'une séparation entre l'épisterne et lui. Celui-ci ne fait qu'exagérer les caractéristiques du Zoraptère, mais sans en modifier le plan général. L'identité de structure des pleures dans les deux ordres s'explique encore plus aisément par la comparaison de leurs prothorax.

Du métathorax au prothorax on observe chez le Zoraptère la perte d'individualité du katépisterne et l'accentuation d'une bifurcation de la crête pleurale tendant à isoler complètement le katépimère et l'épimère. Cet isolement est complet au prothorax chez les Termites. Le prétendu *katépisterne* de Fuller correspond à la somme du katépisterne et du katépimère des Zoraptères entre lesquels la crête chitineuse, correspondant à la crête pleurale, a achevé sa disparition amorcée chez les Zoraptères. La comparaison des prothorax met également en évidence que l'*anépisterne* des Termites (Fuller) correspond, dans sa partie supérieure, à la fusion du latéropleurite et de l'anépisterne (fusion qui existe d'ailleurs sur les autres segments thoraciques) et, dans sa partie inférieure, au latérosternite des Zoraptères.

Le parallélisme de structure des sternites n'est pas moins remarquable. Dans les deux Ordres ils sont très désclérifiés. Les mésosternums et les métasternums des Zoraptères et des Termites sont exactement superposables. La désclérification du prosternum des Termites est poussée à son maximum. Il n'existe plus, chez les Termites, que trois plaques sternales minuscules, dont la postérieure, médiane, porte une très faible furca. Là encore le Termite n'a fait qu'exagérer la structure du Zoraptère.

Une très nette tendance à la désclérification se retrouve également chez les Blattes. L'existence d'une languette chitineuse médiane (*intersternellum*) bordée de deux bandes (*juxtasternella*) est commune à ces trois Ordres. Ce fait semble bien justifier la conception du paléontologiste Martynov qui groupe les Termites, les Blattes et les Mantes dans le superordre des Blattoptéroïdes. Il convient de leur adjoindre les Zoraptères qui, nous venons de le voir, se présentent à bien des égards comme des Termites archaïques. Le polymorphisme morphologique, qui se présente chez eux sans qu'il existe pour cela de vie sociale ni de castes, jette quelque lumière sur ce qu'étaient les Termites avant d'acquérir leur remarquable éthologie.

ENTOMOLOGIE. — *Sur le cycle biologique de Polistes* (*Hyménoptères Vespides*). Note de M. **Edouard-Philippe Deleurance**, présentée par M. Louis Fage.

Les travaux des auteurs établissent comme il suit le cycle annuel des *Polistes* paléarctiques : fondation mono ou polygyne du nid au printemps, apparition des ouvrières, apparition des sexués vers la fin de l'été, massacre et avortement du couvain à l'automne, fécondation des fondatrices-filles (ou hibernantes), hibernation de ces femelles et reprise du cycle par la fondation, au printemps, d'une nouvelle colonie. Généralement, on a attribué les stades successifs de ce cycle aux modifications climatiques qui se produisent au cours de l'année. Parfois on a cherché leurs causes dans des changements sociaux.

Nos travaux, effectués au Laboratoire, tendent à suggérer l'intervention de facteurs internes dans le déterminisme des différentes étapes du cycle annuel. A cet effet, nous exposons brièvement ci-dessous nos observations sur l'élevage de *P. gallicus* L.

1° *Évolution cyclique du couvain.* — La nature du couvain permet de distinguer deux phases successives : Dans la première, le couvain se développe normalement (*couvain normal*), dans la seconde il avorte (*couvain abortif*), on n'observe plus aucune éclosion d'imago. On ne peut attribuer à une variation des conditions climatiques la cause du changement survenu dans la nature du couvain puisque, dans nos élevages, les conditions sont restées pratiquement constantes. La phase abortive apparaît avec la ponte des œufs qui donneront les sexués; le nid semble dès lors irréductiblement condamné. Nous ignorons

les causes de l'avortement du couvain Le phénomène paraît complexe et de prime abord assez déconcertant. En effet :

a. La suppression des fondatrices-filles sur le nid n° 5 n'a pas modifié la phase abortive. De plus, après la mort de la reine, 2 ouvrières se mirent à pondre; 13 jours après, elles étaient âgées de 44 jours. Or leurs œufs donnèrent également un couvain abortif.

b. L'approvisionnement des larves reste normal pendant assez longtemps. Bien plus, lorsque nous avons provoqué la suralimentation de celles-ci, nous n'avons observé aucun effet heureux sur leur destinée.

1° Comme dans nos nids la phase abortive a commencé avant la naissance des ouvrières, nous en déduisons que celles-ci ne sont pour rien dans son apparition.

2° L'apparition des sexués n'est pas déterminée par les ouvrières.

a. *Tous les œufs* qui ont donné les sexués furent pondus *avant* la naissance des ouvrières.

b. 6 cellules à sexués étaient déjà operculées dans le nid n° 1, et 1 dans le nid n° 3, avant l'apparition des ouvrières [1]. Il n'y a donc eu aucune action trophique de la part de celles-ci. Et à moins d'admettre une alimentation *qualitativement* différentielle de la reine pour les larves femelles, il faut songer à la prédétermination dans l'œuf des fondatrices-filles.

L'apparition des sexués est donc un phénomène cyclique en rapport avec l'état physiologique ou autre de la fondatrice.

3° L'allure de l'évolution des nids impose la notion de cycles internes.

		Date			
			de la ponte		
Nature de la colonie.	Activité.	de la fondation du nid.	du 1er œuf donnant 1 sexué.	du dernier œuf (*couvain normal*).	N° du nid.
Mono, puis bigyne......	Moyenne	11–4	4–5 (23)	28–5 (47)	1
Monogyne.............	Faible	19–4	9–5 (20)	28–5 (39)	3
Trigyne...............	Forte	17–4	7–5 (20)	2–6 (46)	5

Entre parenthèses : les durées en jours.

En effet, on voit dans le tableau reproduit ici que, quelles que soient la nature de la Société, l'activité des Guêpes, l'alimentation quantitative des larves, c'est-à-dire plus généralement, quelles que soient les conditions biologiques de nos *Polistes*, les colonies passent par les mêmes stades au bout de durées égales. Or seules étaient comparables, sinon identiques, les conditions physiques, notamment la température (moyenne 25°C.) dans lesquelles les

(1) J'ai pu faire des observations identiques dans la nature.

colonies en question étaient placées. Il faut donc attribuer à des causes intrinsèques (évolution cyclique interne) l'évolution du nid.

4° L'apparition de la phase *couvain abortif* ne modifie pas l'activité de la fécondatrice et des ouvrières. Ainsi, en ce qui concerne la construction de nouvelles cellules, nous observons qu'elle continue comme par le passé. Dans le nid 1 par exemple, cette addition représente 72 % du nombre total des cellules; dans le nid 5, 61 %. Ce qui montre qu'il y a eu davantage de cellules construites pendant la phase *couvain abortif!* Nous ferions la même constatation si nous considérions la ponte de la fondatrice et l'alimentation des larves.

Outre l'existence d'un cycle interne, ces faits prouvent aussi l'absence de régulation dans ce domaine.

TÉRATOLOGIE. — *Malformations congénitales du rachis lombaire coïncidant avec des néphropathies ou du rhumatisme chronique.* Note de M. **Claude-Henri Paillard**, présentée par M. Joseph Magrou.

L'examen des clichés concernant cent soixante malades, radiographiés pour affection rhumatismale, nous a montré la présence de malformations osseuses congénitales du rachis lombaire dans 29 cas, soit dans 18 % des cas. Cette proportion est fortuite; elle ne se retrouvera sans doute pas exactement lors des observations que nous nous proposons de faire d'une façon systématique et prolongée, car un hasard relatif a présidé à la réunion des malades dont nous avons observé les radiographies.

Il est d'ailleurs impossible de prévoir quelle serait cette fréquence si l'on examinait radiologiquement un très grand nombre de sujets normaux. Dans cette Note préliminaire, nous voulons simplement attirer l'attention sur la coexistence relativement fréquente d'une part de malformations osseuses congénitales, d'autre part d'affections rénales et rhumatismales. Nous espérons que d'autres constatations pourront être faites et comparées aux nôtres.

Pour être complète, notre recherche eût dû entreprendre la recherche radiologique d'autres malformations osseuses (côtes cervicales, malformations costales, malformations sternales et xiphoïdiennes, malformations vertébrales, cervicales ou dorsales); il est aisé de comprendre que, pour des raisons budgétaires, il nous ait été impossible d'entreprendre une exploration aussi étendue.

Presque toujours, nous avons eu sous les yeux les articulations sacro-iliaques; mais l'interprétation des images est trop délicate (surtout en l'absence de radiographies prises avec une incidence spécialisée) pour que nous puissions en faire état ici d'une façon précise. Nous nous bornerons donc simplement à exposer les faits que nous avons observés.

1° Type des lésions observées. — *a. Lombalisation de la 12e vertèbre dorsale.* — La 12e dorsale est une vertèbre lombaire, avec des apophyses trans-

verses soudées et pas de côtes (5 cas). Il y a donc, dans ces observations, 6 vertèbres lombaires au lieu de 5;

b. Dorsalisation de la 1[re] *lombaire.* — La 1[re] lombaire a des côtes articulées et non des apophyses soudées (7 cas). Ces côtes sont atrophiques dans tous les cas; elles sont souvent asymétriques (4 cas), une des 13[e] côtes étant plus courte et plus grêle que l'autre. Dans un cas, il y avait une petite côte à droite et une apophyse à gauche;

c. Sacralisation de la 5[e] *lombaire* (3 cas). — Nous recommandons de s'assurer qu'il s'agit bien d'une sacralisation réelle et non apparente, en faisant passer le rayon normal, en incidence appropriée, par le disque L^5-S^1;

d. Morphologie atypique des apophyses transverses (11 cas). — Les apophyses transverses lombaires sont rarement exactement symétriques, même chez des sujets absolument normaux; elles sont inégales, d'une vertèbre lombaire à l'autre, dans leur longueur, leur orientation par rapport au corps vertébral. Nous n'avons tenu compte ici que des malformations importantes (apophyses particulièrement longues ou courtes, trapues ou grêles, apophyses à implantation oblique accentuée). Chaque vertèbre a son type transversaire avec les deux apophyses à peu près comparables, mais il est impossible de ne pas être frappé par le fait que les apophyses transverses de L^3, par exemple, sont grêles et ténues, tandis que celles de L^2, par exemple sont massives et courtes. Ces malformations coexistent souvent avec telles ou telles des autres lésions que nous décrivons au cours de ce paragraphe.

e. Spina bifida (3 cas). — Cette lésion siège le plus souvent sur L^5 (2 cas) ou sur S^1 (1 cas). Dans les cas que nous avons observés, il s'agit simplement de *spina bifida* radiologique.

2° Coïncidence de ces malformations avec des néphropathies ou des lésions rhumatismales. — Les malformations précitées ont été observées chez des malades atteints de : *a.* lithiase urinaire urique (1 cas); *b.* lithiase urinaire phosphatique (4 cas); *c.* tuberculose rénale (1 cas); *d. rein double avec double bassinet* vu à l'urographie intraveineuse (3 cas); *e. hydronéphrose* avec ou sans ptose rénale (13 cas); *f.* rhumatisme vertébral avec ostéophytes ou syndesmophytes (5 cas).

Il n'y a pas lieu d'insister sur les coïncidences rares; mais on ne peut négliger que ces malformations osseuses existent, avec une particulière fréquence au cours des monstruosités rénales et des hydronéphroses (dont on sait actuellement que beaucoup sont congénitales). Les malformations vertébrales coexistant avec ces légions rénales sont presque toujours des altérations de L^1 ou de D^{12}.

Il y aurait donc, assez fréquemment, une malformation viscérale à côté d'une malformation osseuse.

Notre statistique est trop limitée pour pouvoir permettre des conclusions formelles. Nous avons entrepris ce travail, parce que de nombreuses impres-

sions antérieures avaient fixé notre attention sur ce point. La vérification peut être entreprise sur de plus nombreux documents et nous souhaitons que les notions apportées ici soient complétées et contrôlées.

CHIMIE BIOLOGIQUE. — *Dosage de la créatine et de la créatinine.* Note [1] de M. **Maurice Gilly**, présentée par M. Louis Hackspill.

Le dosage de la créatinine est une application de la réaction de Jaffé; coloration jaune orangé donnée par l'action de l'acide picrique en présence de soude. La créatine, qui ne donne pas cette réaction, est dosée indirectement en déterminant, d'une part, la créatinine et, d'autre part, la créatinine totale, somme de la créatinine et de la créatine transformée en créatinine par déshydratation avec de l'acide chlorhydrique.

La méthode de Folin comportait la comparaison au colorimètre de la coloration donnée par la réaction de Jaffé avec une solution de bichromate de potassium demi-normale. Cette méthode a les défauts principaux suivants : erreur due à l'œil et à la fatigue de l'œil de l'observateur, impossibilité de la mesure de faibles quantités de créatinine.

L'apparition des électrophotomètres et leur utilisation pour ce dosage ont permis de supprimer la cause d'erreur due à l'œil de l'observateur, et de rendre possible la mesure de faibles teneurs. Mais celle-ci est faite avec peu de précision, même si l'on déduit la coloration de base : coloration propre du produit. Car l'erreur provient, non de la coloration propre du produit, mais de la coloration, comparable à celle donnée par la créatinine, que développent certains corps.

Certains auteurs ont préconisé l'emploi avant développement de la réaction de Jaffé, les uns de divers défécants, les autres de permanganate de potassium.

Ces différentes méthodes ne nous ont pas donné satisfaction. En effet, il y a absorption d'une certaine quantité de créatinine par le défécant ou le précipité qu'il donne, et destruction partielle de la créatinine en milieu oxydant.

Nous avons alors cherché à détruire la créatinine dans des conditions les plus douces possibles afin de réduire au minimum l'altération des corps étrangers donnant une teneur en créatinine apparente; la soude a permis de réaliser ce but et donc de mesurer la *coloration de base picrique*.

Nous avons utilisé pour ces recherches un *électrophotomètre* à deux cellules photoélectriques montées en opposition, donc un appareil de zéro, chaque mesure étant faite en ramenant au zéro le spot d'un galvanomètre branché en pont par le déplacement d'un tambour gradué commandant un coin photométrique; le tambour marquant zéro quand le coin est engagé entièrement

---

[1] Séance du 9 février 1948.

sur un des deux flux lumineux sur lequel se trouve la cuve contenant le produit dont on veut mesurer la coloration.

Après avoir choisi l'écran donnant les meilleurs résultats (écran bleu), étalonné cet électromètre, étudié les différents facteurs ayant une influence sur la coloration, nous avons adopté le processus suivant :

1° *Mode opératoire.* — Développement de la réaction de Jaffé sur un volume constant égal à 6^{cm^3}. Addition de 20^{cm^3} d'acide picrique 1 %, puis 10^{cm^3} de soude 2,5 N après transformation de la créatine en créatinine ou 6^{cm^3} de cette même soude dans les autres cas.

Instant zéro compté à l'instant ou la dernière goutte de soude est tombée. Instant 5 minutes, temps compté au chronomètre, fin de la réaction de Jaffé, addition d'eau distillée et dilution à 500^{cm^3}.

Instant 8 minutes, le liquide ainsi obtenu est dans la cuve, celle-ci est sur le trajet des rayons lumineux, les lampes de l'électrophotomètre et de son galvanomètre étant allumées.

Instant 11 minutes, lecture.

2° *Coloration de base picrique* B. — 5^{cm^3} de solution du produit, ces 5^{cm^3} contenant environ 1^{mg} de créatinine totale, additionnés de 1^{cm^3} de soude 2 N sont laissés deux heures sur un bain-marie à 80° dans un ballon muni d'un entonnoir condenseur, puis on neutralise par 2^{cm^3} d'acide chlorhydrique 2 N... (*voir* mode opératoire).

3° *Créatinine* C. — 5^{cm^3} de la même solution du produit additionnés de 1^{cm^3} d'eau distillée... (*voir* mode opératoire), d'où $B = C$ et C par différence avec B.

4° *Créatinine totale* $C + c$. — c, créatine exprimée en créatinine 5^{cm^3} de la même solution du produit additionnés de 1^{cm^3} d'acide chlorhydrique 10 N sont laissés une heure et demie sur un bain-marie dans un ballon muni d'un entonnoir condenseur... (*voir* mode opératoire), d'où $B + C + c$, $C + c$, c et la créatine $1.159\,c$.

Remarque. — Le zéro de l'électrophotomètre, c'est-à-dire le nombre de divisions du tambour correspondant au développement de la coloration sur 6^{cm^3} d'eau distillée suivant le mode opératoire pourra ne pas être égal à zéro si les conditions d'utilisation de l'appareil ne le permettent pas. Mais, pratiquement, il ne sera évidemment pas nécessaire de le déterminer, ce nombre s'annulant dans les différences effectuées. Il ne sera nécessaire de le mesurer que si l'on veut connaître la valeur réelle de B. Nous avons eu, dans les conditions d'utilisation de l'électrophotomètre employé, la relation $N = 76\,a$, soit $a = 0.0132\,N$, $N = T - B$; a, nombre de milligrammes de créatinine de la prise d'essai de 5^{cm^3}; B, nombre de divisions du tambour correspondant au 2°; N, nombre de divisions du tambour correspondant au 3° ou 4°. D'où tableau $a = f(N)$. Erreur relative 3 %.

MICROBIOLOGIE. — *Quelques donnée nouvelles sur le virus de la Q. fever marocaine.* Note (¹) de MM. **Georges Blanc, Jean Bruneau, Louis-André Martin** et **André Maurice**, présentée par M. Jacques Tréfouël.

Nous avons fait connaître l'existence au Maroc méridional, à Goulimine, du virus de la Q. fever (*Rickettsia burneti*) chez une tique *Hyalomma savignyi* et chez un rongeur *Meriones shawi*. Nous avons étudié le comportement de cette rickettsia chez divers arthropodes piqueurs et montré son pouvoir pathogène pour certains rongeurs ou insectivores sauvages et la sensibilité du mouton et de la chèvre à l'infection expérimentale (²). A ces données nous pouvons en ajouter quelques nouvelles.

Souches isolées. — A Goulimine nous avions isolé quatre souches de *R. burneti* de *Hyalomma* provenant de moutons et de chèvres, ou capturés au sol, et deux souches de *Meriones*. Deux autres l'ont été dans la même région, l'une de Hyalomma provenant de bovins et de chameaux, l'autre de *Hyalomma dromedarii* recueillis sur chameau (dromadaire). Nous avons aussi trouvé d'autres souches en des points fort éloignés de Goulimine : une à Agdz (sud marocain), deux à Fquih Ben Salah (région de Beni Mellal, à 200 kilomètres Sud-Est de Casablanca) et enfin une à Casablanca. La souche d'Agdz provient de *Hyalomma* de chameau; celles de Fquih Ben Salah ont été isolées, l'une de *H. excavatum V. lusitanicum* (³) trouvés à terre près de terriers de mérions parfois même dans les terriers, et l'autre de *Hyalomma* capturés sur un âne; la souche de Casablanca provient d'un *Hyalomma* pris à l'Institut Pasteur sur une génisse. A Fquih Ben Salah nous avons également isolé trois souches de rongeurs (mérions).

Passage transovulaire du virus chez la tique. — La ponte d'un Hyalomma infecté a été recueillie, les larves issues de ces œufs, puis les nymphes ont été nourries sur des cobayes non infectés. Les mâles et femelles issus de ces nymphes ont donné deux fois sur trois essais l'infection expérimentale au cobaye.

Espèces sensibles. — Outre la chèvre et le mouton nous avons pu infecter des bovins et un chameau (dromadaire); ils font une réaction fébrile et leur sérum devient agglutinant pour *R. burneti;* nous avons aussi obtenu l'infection expérimentale chez différents rongeurs sauvages : *Rattus rattus ater, Rattus rattus frugivorus* et *Dipodillus campestris riparius*. Ces deux dernières espèces provenaient de Fquih Ben Salah, là même où nous avons isolé le virus de mérions ; leur infection naturelle sera à rechercher, elle paraît probable.

(¹) Séance du 9 février 1948.

(²) *Comptes rendus*, 223, 1946, p. 438, et 224, 1947, p. 1673; *Bull. Aca. méd.*, 131, 1947, p. 138; Georges Blanc et L. A. Martin, *C. R. Soc. biol.*, 141, 1947, p. 263.

(³) Nous devons cette détermination au Docteur Delpy.

Considération épidémiologique. — Les animaux domestiques : chameaux, bovins, ânes, moutons, chèvres, peuvent être porteurs de tiques infectées ([4]) et donc jouer un rôle de premier plan dans la dissémination du virus et peut-être même, quelquefois, infecter les tiques qui se gorgent sur eux. Quant aux rongeurs, dans les terriers desquels on trouve des Hyalomma et sur lesquels se gorgent larves et nymphes de Hyalomma et de Rhipicéphales, ils peuvent éventuellement jouer un rôle de réservoir de virus. Nous croyons cependant que *R. burneti* est avant tout, au Maroc, un parasite de Hyalomma dont l'évolution et la persistance sont assurés par la transmission transovulaire de la femelle aux œufs, le vertébré infecté ne jouant qu'un rôle accessoire pour l'entretien du virus. Un fait paraît être en faveur de cette opinion : les Rhipicéphales pris sur des mérions, et les ornithodores capturés dans leurs terriers, ne se sont, jusqu'à présent, jamais montré infectés dans nos expériences, et cependant ces acariens, nourris sur cobayes infectés expérimentalement, se comportent comme les Hyalomma. A Fquih Ben Salah, en particulier, des nymphes gorgées de Rhipicéphales provenant d'un lot de plus de 100 mérions, là même où nous avons trouvé Hyalomma et mérions infectés, n'étaient pas porteurs de virus non plus que les ornithodores capturés dans les terriers de mérions. Il semble bien que ce soit la tique qui infecte le vertébré et qu'elle ne s'infecte que rarement sur lui, les Hyalomma apparaissant comme les véritables réservoirs de virus de la Q. fever marocaine.

A 15h50m l'Académie se forme en Comité secret.

COMITÉ SECRET.

M. **Albert Caquot** donne lecture d'un rapport sur diverses questions économiques et industrielles d'intérêt national, que M. **Demolon** complète par diverses indications concernant l'Agriculture.

L'Académie décide que ce rapport et les observations de M. Demolon seront imprimés dans le Recueil des *Notices et Discours* et qu'il en sera fait, dès maintenant, un tirage à part qui sera mis en distribution.

La séance est levée à 16h45m.

L. B.

([4]) Il est probable que toutes les espèces de Hyalomma vivant sur les mammifères peuvent héberger *R. burneti*.